Trigonometría



Intelectum
Trigonometría

IT

Indicadores de logro

Unidad 1

- Diferencia entre ángulo negativo y positivo.
- Representa gráficamente un ángulo trigonométrico.
- Aplica la relación dada para realizar las conversiones.
- Evalúa los sistemas angulares y su proceso de conversión (sistemas sexagesimal, centesimal y radial).
- Utiliza las notaciones al realizar las conversiones.
- Analiza las distintas relaciones dadas para el cálculo del área del sector circular.
- Calcula el valor de la longitud de arco y el área del sector circular.
- Identifica gráficamente un arco dentro de una circunferencia.
- Identifica los elementos de un triángulo rectángulo (cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa).
- Describe cada razón trigonométrica (seno, coseno, secante, cosecante, tangente y cotangente).
- Aplica propiedades al calcular las razones trigonométricas de ángulos agudos.

Unidad 2

- Identifica los casos en que debe usar las razones trigonométricas de ángulos complementarios y las razones recíprocas.
- Aplica las razones trigonométricas para ángulos complementarios.
- Evalúa las proporciones de los lados de los triángulos pitagóricos, exactos y aproximados.
- Utiliza las co-razones para determinar las razones trigonométricas de ángulos complementarios.
- Evalúa el seno, coseno, secante, cosecante, tangente y cotangente de cada ángulo notable.
- Utiliza las razones trigonométricas recíprocas para la resolución de problemas.
- Identifica los elementos del triángulo rectángulo para luego decidir el caso a utilizar para su resolución.
- Comprende los casos estudiados para la resolución de triángulos rectángulos.
- Calcula la razón trigonométrica de cada ángulo notable.

El plano cartesiano y las fallas geológicas

La geología es la ciencia de la tierra que estudia el origen, estructura, composición y los fenómenos que se han producido en ella desde su formación (hace 4500 millones de años aproximadamente) hasta la actualidad. Una de sus ramas es la geología estructural que se encarga del estudio de las deformaciones que sufre la corteza terrestre (fallas, pliegues y diaclasas). Para ello es necesario el uso de la brújula Brunton que nos permite determinar con exactitud la dirección (rumbo) y buzamiento (inclinación) en el plano cartesiano de las estructuras geológicas. Conociendo el rumbo y buzamiento los geólogos pueden ayudarse de estos para determinar posibles reservas mineras, petroleras, etc. Es por esto de la importancia del estudio del SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS.



Contenido:

Unidad 1

- **Ángulo trigonométrico y sistemas de medidas angulares.**
- **Sector circular.**
- **Razones trigonométricas de ángulos agudos.**

Unidad 2

- **Propiedades de las razones trigonométricas.**
- **Razones trigonométricas de ángulos notables.**
- **Resolución de triángulos rectángulos.**

Unidad 3

- **Sistema de coordenadas rectangulares.**
- **Razones trigonométricas de un ángulo en cualquier magnitud.**
- **Ángulos verticales.**

Unidad 4

- **Reducción al primer cuadrante.**
- **Identidades trigonométricas.**
- **Sistema métrico decimal.**

Unidad 3

- Identifica puntos coordenados en el plano y los utiliza para ubicar rectas o figuras planas en el plano cartesiano.
- Calcula el punto medio de un segmento, la distancia entre dos puntos y el área de una región plana utilizando las coordenadas de puntos en el plano.
- Define las razones trigonométricas para ángulos en posición normal, ángulos cotermianles y ángulos negativos.
- Calcula el valor de cada razón trigonométrica del ángulo en posición normal, considerando su ubicación en el plano.
- Analiza el signo de cada ángulo de cualquier magnitud evaluando el cuadrante en donde se encuentra su lado final.
- Discrimina entre ángulo de elevación y depresión.
- Representa gráficamente ángulos verticales y emplea las razones trigonométricas para la resolución de problemas.

Unidad 4

- Realiza la reducción al primer cuadrante identificando correctamente cada uno de los tres casos estudiados.
- Aplica las reglas adecuadamente para la aplicación de la reducción analizando los ángulos dados.
- Calcula el valor de ángulos en posición normal reducidos al primer cuadrante.
- Discrimina entre las identidades trigonométricas recíprocas, por cociente y pitagóricas.
- Simplifica expresiones trigonométricas empleando las identidades estudiadas.
- Diferencia múltiplo de submúltiplos al momento de realizar las conversiones entre unidades en el sistema métrico decimal.
- Utiliza los múltiplos y submúltiplos de cada una de las unidades estudiadas para el cálculo de conversiones.



LA CASA DEL ÁRBOL



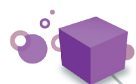










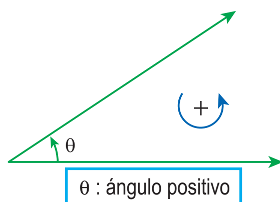


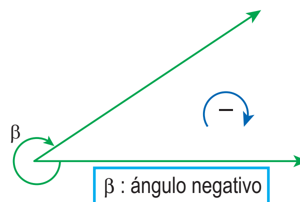
UNIDAD 1

ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

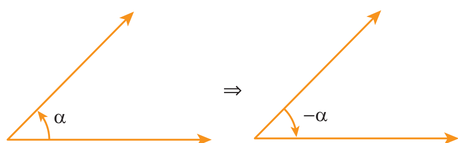
ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

Es aquel ángulo que se genera por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo llamado vértice (la rotación se realiza en un mismo plano). Si la rotación se realiza en sentido antihorario, el ángulo se considera positivo; en cambio, si la rotación es en sentido horario, el ángulo se considera negativo.



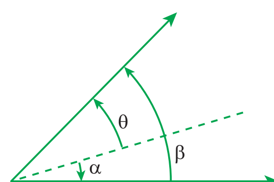


a) Cuando a un ángulo trigonométrico se le cambia el sentido, su signo cambia.

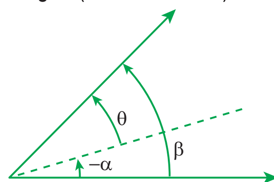


b) Para sumar ángulos trigonométricos en una gráfica, estos deben tener el mismo sentido.

Ejemplo:
Halla θ en función de α y β.



Invertimos los ángulos hacia un mismo sentido de giro (sentido horario).

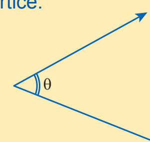


Sumando ángulos:

$$\theta + (-\alpha) = \beta$$
$$\theta - \alpha = \beta$$
$$\theta = \beta + \alpha$$

Recuerda

En geometría se considera a un ángulo como la figura formada por dos rayos que parten de un mismo punto llamado vértice.





SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

Sistema sexagesimal o inglés

Tiene como unidad al grado sexagesimal (1°), se obtiene al dividir el ángulo de una vuelta en 360 partes iguales.

$$\frac{m\angle 1 \text{ vuelta}}{360} = 1° \Rightarrow \boxed{m\angle 1 \text{ vuelta} = 360°}$$

Asimismo, a un grado sexagesimal se le divide en 60 partes iguales y a cada parte se le denomina **minuto sexagesimal**; a su vez, a cada minuto se le divide en 60 partes iguales y a cada parte se le denomina **segundo sexagesimal**.

Notación	Equivalencias	Conversión
1°: un grado sexagesimal. 1': un minuto sexagesimal. 1": un segundo sexagesimal.	$1° = 60'$ $1' = 60''$	$1° = 60' = 60 \times 1' = 60 \times 60'' = 3600''$ $\therefore 1° = 3600''$

Nota

Los minutos y segundos sirven para representar valores menores a 1° y 1' respectivamente.

Notación del ángulo en grados, minutos y segundos:
$a°\, b'\, c'' = a° + b' + c''$

Donde: $b < 60$
$c < 60$

Sistema centesimal o francés

Tiene como unidad al grado centesimal (1^g) se obtiene al dividir el ángulo de una vuelta en 400 partes iguales.

$$\frac{m\angle 1 \text{ vuelta}}{400} = 1^g \Rightarrow \boxed{m\angle 1 \text{ vuelta} = 400^g}$$

Nota

Los minutos y segundos centesimales sirven para representar valores menores a 1^g y 1^m respectivamente.

$x^g y^m z^s = x^g + y^m + z^s$

Donde:

$y < 100$
$z < 100$

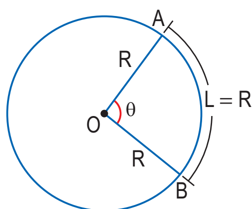
Además, a cada grado centesimal se le divide en 100 partes iguales y a cada parte se le denomina **minuto centesimal**; a su vez, a cada minuto se le divide en 100 partes iguales y a cada parte se le denomina **segundo centesimal**.

Notación	Equivalencias	Conversión
1^g: un grado centesimal. 1^m: un minuto centesimal. 1^s: un segundo centesimal.	$1^g = 100^m$ $1^m = 100^s$	$1^g = 100 \times 1^m = 100 \times 100^s = 10\ 000^s$ $\therefore 1^g = 10\ 000^s$



Sistema radial o circular

Conocido también como **Sistema Internacional**, tiene como unidad angular al radián (1 rad), el cual se define como la medida del ángulo central que subtiende un arco de longitud igual al radio de la circunferencia al que pertenece.



El número de radianes de un ángulo central se calcula:

$\theta = \frac{L}{R}$; de la figura: $\theta = \frac{R}{R} = 1$ rad

Además:

$1 \text{ rad} = \frac{m\angle 1 \text{ vuelta}}{2\pi} \Rightarrow$ $m\angle 1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ rad}$

CONVERSIÓN ENTRE SISTEMAS

Es el proceso en el cual un ángulo en cierto sistema se transforma a cualquier otro sistema de medida.

Observación

Por el número de partes en que cada sistema divide al ángulo de 1 vuelta se concluye.

$1 \text{ rad} > 1° > 1^g$

Factor de conversión

Es una fracción igual a la unidad, donde el numerador y el denominador son las medidas de un mismo ángulo expresado en diferentes sistemas convencionales (sexagesimal, centesimales y radial).

$m\angle 1\text{vuelta} = 360° = 400^g = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow$ $180° = 200^g = \pi \text{ rad}$ (equivalencias)

Usando conversiones podemos obtener factores de conversión de los tres sistemas convencionales.

Equivalencia	Factor de conversión
$180° = 200^g$	$\frac{180°}{200^g} = 1$
$\pi \text{ rad} = 180°$	$\frac{\pi \text{ rad}}{180°} = 1$
$200^g = \pi \text{ rad}$	$\frac{200^g}{\pi \text{ rad}} = 1$

Ejemplo:
Transforma 40° al sistema radial.

Resolución:

$40° = 40° \times 1 = 40° \times \underbrace{\frac{\pi \text{ rad}}{180°}}_{\text{factor de conversión}}$ $\begin{matrix}\Rightarrow \text{sistema final} \\ \Rightarrow \text{sistema inicial}\end{matrix}$

$\therefore 40° = \frac{2\pi}{9}$ rad

Ejemplo:
Transforma 60^g al sistema sexagesimal.

Resolución:

$60^g = 60^g \times 1 = 60^g \times \underbrace{\frac{180°}{200^g}}_{\text{factor de conversión}}$ $\begin{matrix}\Rightarrow \text{sistema final} \\ \Rightarrow \text{sistema inicial}\end{matrix}$

$\therefore 60^g = 54°$

Atención

Para transformar un ángulo α de un sistema A (inicial) a un sistema B (final), el factor de conversión es de la forma:

$\frac{b}{a}$ $\begin{matrix}\Rightarrow \text{Sistema final} \\ \Rightarrow \text{Sistema inicial}\end{matrix}$

a, b medidas de un mismo ángulo en los sistemas A y B respectivamente.

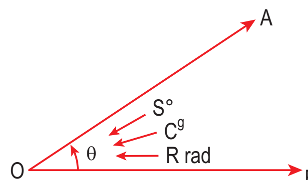


Fórmulas de conversión

Sean S, C y R los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial respectivamente, la relación que existe entre ellos será:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

(Fórmula general de conversión)



La fórmula general de conversión se puede demostrar de distintas formas, en esta oportunidad usaremos el método de factores de conversión a modo de práctica. Sean S, C, R los valores en los tres sistemas correspondientes a un ángulo α, es decir:

$m\angle\alpha = S° = C^g = R$ rad, luego:

Transformamos S° al sistema centesimal usando el método del factor:

$S° = S° \times 1 = S° \times \dfrac{200^g}{180°} = \left(\dfrac{200S}{180}\right)^g = C^g$; de las equivalencias: $S° = C^g$

Entonces: $\left(\dfrac{200S}{180}\right)^g = C^g$

$$\frac{200S}{180} = C; \quad \text{finalmente: } \frac{S}{180} = \frac{C}{200} \qquad \text{... (1)}$$

Ahora transformamos C^g al sistema radial:

$C^g = C^g \times 1 = C^g \times \dfrac{\pi \text{ rad}}{200^g} = \left(\dfrac{\pi C}{200}\right)$ rad $= R$ rad, de las equivalencias: $C^g = R$ rad

Luego: $\left(\dfrac{\pi C}{200}\right)$rad $= R$ rad

$$\frac{\pi C}{200} = R; \text{ por lo tanto: } \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \qquad \text{... (2)}$$

De (1) y (2) tenemos:

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}};$$

Corolario

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{20R}{\pi} \qquad \frac{S}{9} = \frac{C}{10}$$

Ejemplo:
Si la diferencia entre el número de grados centesimales y número de grados sexagesimales es igual a 2, halla la medida del ángulo en radianes.

Resolución:
De los datos:
$C - S = 2$; del corolario.

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10}\ ;\ S = \frac{9C}{10}$$

Reemplazando:

$$C - \frac{9C}{10} = 2;\ \frac{C}{10} = 2 \Rightarrow C = 20 \qquad \text{... (1)}$$

De la fórmula general de conversión:

$$\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} = \frac{\cancel{20}}{\cancel{200}} = \frac{R}{\pi};\ R = \frac{\pi}{10}$$

$\therefore$ La medida del ángulo es igual a $\dfrac{\pi}{10}$ rad.

Además, para resolver problemas, podemos usar el siguiente método:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} = k \begin{cases} S = 180k \\ C = 200k \\ R = \pi k \end{cases}$$

También del corolario:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{20R}{\pi} = m \begin{cases} S = 9m \\ C = 10m \\ R = \dfrac{\pi m}{20} \end{cases}$$

Para el ejemplo:
$C - S = 2$, por lo anterior: $C - S = 10m - 9m$
$\Rightarrow m = 2$

Reemplazamos:

$$R = \frac{\pi m}{20} = \frac{\pi(2)}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ rad}$$



Recuerda

De las equivalencias; para el sistema sexagesimal y centesimal.

$180° = 200^g$
$9° \times 20 = 10^g \times 20$
$9° = 10^g$

Luego:

- $1 = \dfrac{9°}{10^g}$
- $1 = \dfrac{10^g}{9°}$

Factores de conversión

Recuerda

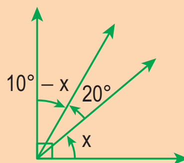
Se cumple para las subunidades de los sistemas sexagesimal y centesimal:

Sistema / Subunidad	S	C
Minutos	60'	100^m
Segundos	3600''	$10\,000^s$



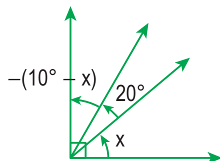
Problemas resueltos

1 Determina el valor de "x" en el gráfico:



Resolución:

Pasamos los ángulos al sentido antihorario:



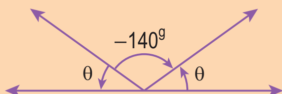
$x + 20° - (10° - x) = 90°$

$x + 20° - 10° + x = 90°$

$2x = 80°$

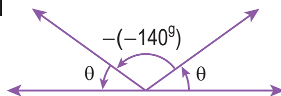
$x = 40°$

2 En la siguiente figura, ¿cuál es el valor de θ en el sistema sexagesimal?



Resolución:

Primero pasamos los ángulos al sentido antihorario:



$\theta + -(-140^g) + \theta = 180°$

$\Rightarrow\ 2\theta + 140^g = 180°$

Convertimos 140^g al sistema sexagesimal:

$2\theta + 140^g \times \dfrac{9°}{10^g} = 180°$

$2\theta + 126° = 180°$

$2\theta = 54°$

$\theta = 27°$

3 Calcula el valor de: $\Delta = \dfrac{1°}{30'} + \dfrac{1^g}{25^m}$

Resolución:

Usamos equivalencia para los sistemas sexagesimal y centesimal:

$\Delta = \dfrac{1°}{30'} + \dfrac{1^g}{25^m} = \dfrac{(60')}{30'} + \dfrac{(100^m)}{25^m}$

$\Delta = 2 + 4$

$\Delta = 6$

4 Sea $\theta = a°\ b'\ c''$, calcula el valor de $a - c + b$, si:

$\theta = 45°\ 26'\ 55'' + 13°\ 48'\ 37''$

Resolución:

Primero agrupamos con respecto a sus respectivas magnitudes:

$\theta = 45°\ 26'\ 55'' + 13°\ 48'\ 37''$

$\theta = 45° + 26' + 55'' + 13° + 48' + 37''$

$\theta = (45 + 13)° + (26 + 48)' + (55 + 37)''$

$\theta = 58° + 74' + 92''$

Por equivalencia: $60'' = 1'$

$\theta = 58° + 74' + [60'' + 32'']$

$\theta = 58° + 74' + 1' + 32''$

$\theta = 58° + 75' + 32''$

Por equivalencia: $60' = 1°$

$\theta = 58° + [60' + 15'] + 32''$

$\theta = 58° + 1° + 15' + 32''$

$\theta = 59° + 15' + 32''$

$\theta = 59°\ 15'\ 32''$

Finalmente:

$\theta = a°\ b'\ c'' = 59°\ 15'\ 32'' \Rightarrow a - c + b = 59 - 32 + 15$

$\therefore\ a - c + b = 42$

5 Determina: $E = B + C - A$ en radianes.

$A = 135° + \dfrac{\pi}{12}$ rad

$B = 40^g + 36°$

$C = \dfrac{4\pi}{3}$ rad $+ 70^g$

Resolución:

Convertimos todo a radianes:

Usamos factores de conversión:

$\dfrac{\pi}{180°}$ rad y $\dfrac{\pi}{200^g}$ rad

$A = 135° + \dfrac{\pi}{12}$ rad

$A = 135° \times \dfrac{\pi}{180°}$ rad $+ \dfrac{\pi}{12}$ rad

$A = \dfrac{5\pi}{6}$ rad

$B = 40^g \times \dfrac{\pi}{200^g}$ rad $+\ 36° \times \dfrac{\pi}{180°}$ rad

$B = \dfrac{\pi}{5}$ rad $+ \dfrac{\pi}{5}$ rad $= \dfrac{2\pi}{5}$ rad

$C = \dfrac{4\pi}{3}$ rad $+ 70^g \times \dfrac{\pi}{200^g}$ rad

$C = \dfrac{4\pi}{3}$ rad $+ \dfrac{7\pi}{20}$ rad

$C = \dfrac{101\pi}{60}$ rad

Piden:

$E = B + C - A$

$E = \dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{101\pi}{60} - \dfrac{5\pi}{6}$

$E = \dfrac{24\pi + 101\pi - 50\pi}{60}$

$E = \dfrac{75\pi}{60} = \dfrac{5\pi}{4}$ rad

6 Calcula x, sabiendo que se cumple:

$$\frac{33° + 2x^g + \frac{\pi}{4} \text{ rad}}{23° + x° + \frac{\pi}{3} \text{ rad}} = 1$$

Resolución:

$33° + 2x^g + \frac{\pi}{4}$ rad $= 23° + x° + \frac{\pi}{3}$ rad

Usamos fórmulas de conversión:

$\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$ y $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$

$$10° + 2x^g \times \frac{9°}{10^g} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = x°$$

$$10° + \frac{9°}{5}x - \frac{\pi}{12} \times \frac{180°}{\pi} = x°$$

$$10 - 15 = x - \frac{9}{5}x$$

$$-5 = \frac{-4}{5}x$$

$$\Rightarrow x = \frac{25}{4}$$

7 Señala la medida sexagesimal de un ángulo que verifica:

$$\frac{4S - C}{2} = \frac{C}{5} + 11$$

Siendo S y C lo conocido.

Resolución:

De la condición:

$\frac{4S - C}{2} = \frac{C}{5} + 11 \Rightarrow \frac{4S - C}{2} = \frac{C + 55}{5}$

Luego:

$20S - 5C = 2C + 110$

$20S - 7C = 110$

Usamos la fórmula de conversión:

$20S - 7 \times \frac{10}{9} S = 110$

$180S - 70S = 9 \times 110$

$110S = 9 \times 110$

$S = 9$

La medida en grados sexagesimales es 9°.

8 Los $\frac{8}{3}$ de la unidad de medida de un ángulo en un determinado sistema es equivalente a 96°. Halla lo que mide dicha unidad angular en radianes.

Resolución:

De la condición:

$\frac{8}{3}x = 96° \Rightarrow x = 36°$

Convertimos a radianes, usando factor de conversión:

$36° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{5}$ rad

Luego, por el corolario:

$\frac{S}{9} = \frac{20R}{\pi} \Rightarrow \frac{36}{9} = \frac{20R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{5}$rad

9 Calcula la medida en el sistema circular de un ángulo sabiendo que la diferencia de su número de grados centesimales y sexagesimales es a su suma como tres veces su número de radianes es a 10π.

Resolución:

Sean S: n.° de grados sexagesimales.

C: n.° de grados centesimales.

R: n.° de radianes.

Entonces de la condición:

$\frac{C - S}{C + S} = \frac{3R}{10\pi}$

Del corolario igualamos a una constante:

$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = k \Rightarrow S = 9k \wedge C = 10k$

$\frac{10k - 9k}{10k + 9k} = \frac{3R}{10\pi}$

$\frac{1}{19} = \frac{3R}{10\pi}$

$\Rightarrow R = \frac{10\pi}{57}$ rad

10 Si a la tercera parte del número de grados sexagesimales de un ángulo se le aumenta 10, resulta la mitad de su número de grados centesimales. Calcula la medida radial de dicho ángulo.

Resolución:

De la solución:

$\frac{1}{3}S + 10 = \frac{1}{2}C$

Pero:

$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = k \Rightarrow S = 9k \quad \wedge \quad C = 10k$

Entonces:

$\frac{1}{3}(9k) + 10 = \frac{1}{2}(10k)$

$10 = 2k \Rightarrow k = 5$

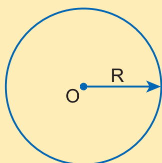
Reemplazando y transformando:

$S = 9k = 9(5) = 45°$

$R = 45° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{4}$ rad

SECTOR CIRCULAR

Observación



La medida del ángulo de una vuelta (m ∠ 1vuelta) en el sistema radial es 2π rad. Entonces, la longitud de la circunferencia (L_c) será:

$L_c = \theta R = (2\pi)R$

$\Rightarrow$ $L_c = 2\pi R$



CIRCUNFERENCIA

Es una curva cerrada y plana cuyos puntos están a la misma distancia de un punto denominado centro. A dicha distancia constante se le conoce como radio de la circunferencia.

ARCO DE CIRCUNFERENCIA

Es una porción de circunferencia comprendida entre dos puntos que pertenecen a ella.

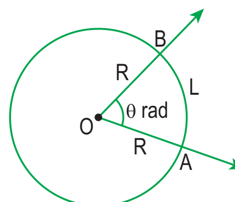
Longitud de arco

Es la medida del arco correspondiente a un ángulo central.

θ: número de radianes del ángulo central AOB.

R: radio de la circunferencia.

L: longitud de arco AB.



El cálculo de la longitud de arco se deduce de la definición que expresa la medida circular (sistema radial) de un ángulo central.

$$\theta = \frac{L}{R}, \text{ luego } \boxed{L = \theta R}$$

CÍRCULO

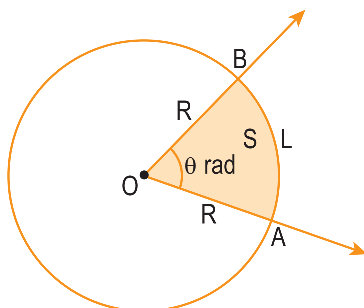
Es la figura plana formada por una circunferencia más toda su región o área interior.

Sector circular

Es la porción de un círculo limitada por dos radios y su arco correspondiente.

Área de un sector circular

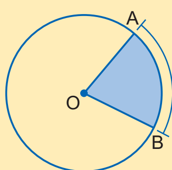
El cálculo del área se puede deducir ya que el área del sector circular (S) y el ángulo central (θ) son magnitudes directamente proporcionales, luego:



$$\frac{S}{\theta} = \frac{\text{Área del circulo}}{2\pi} = \frac{\pi R^2}{2\pi}$$

$$\therefore\ S = \frac{\theta R^2}{2} \qquad \text{... (1)}$$

Recuerda



Donde:
- $S_{\triangleleft AOB}$: área del sector circular AOB.
- $L_{\widehat{AB}}$: longitud de arco AB.



De la expresión de longitud de arco $L = \theta R$ o $R = \frac{L}{\theta}$:

En (1):

$S = \frac{1}{2}\theta R^2$; pero $L = \theta R$	o	$S = \frac{1}{2}\theta R^2$; pero $R = \frac{L}{\theta}$
$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(\theta R)R = \frac{1}{2}LR$		$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\theta\left(\frac{L}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\theta}$

Por lo tanto, para el cálculo del área del sector circular se puede usar cualquiera de las expresiones según convenga, es decir según los datos que se disponga en el ejercicio.

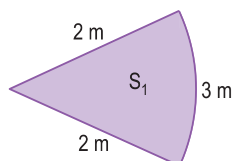
$$\boxed{S = \frac{1}{2}\theta R^2} \qquad \boxed{S = \frac{L^2}{2\theta}} \qquad \boxed{S = \frac{RL}{2}}$$

Donde:
S: área del sector circular.
R: radio del sector circular.
θ: número de radianes del ángulo central.
L: Longitud de arco del sector circular.

Ejemplos:

Calcula el valor del área de los sectores circulares S_1; S_2 y S_3 mostrados en cada caso.

a)



Resolución:

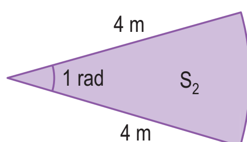
De los datos:

$S_1 = \frac{L.R}{2}$

$S_1 = \frac{(3)(2)}{2}$

$\therefore\ S = 3\ m^2$

b)



Resolución:

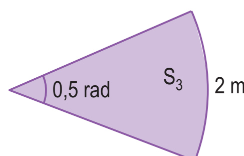
De los datos:

$S_2 = \frac{1}{2}\ \theta R^2$

$S_2 = \frac{1}{2}\ (1)(4)^2$

$\therefore\ S_2 = 8\ m^2$

c)



Resolución:

De los datos:

$S_3 = \frac{L^2}{2\theta}$

$S_3 = \frac{(2)^2}{2(0,5)}$

$\therefore\ S_3 = 4\ m^2$

Observación

El uso de las expresiones dependerá de los datos que el problema contenga para facilitar el cálculo de los mismos.



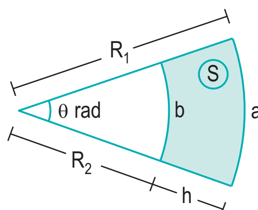
Trapecio circular

Se llama trapecio circular a aquella región circular formada por la diferencia de dos sectores concéntricos y radios diferentes:

El área del trapecio (S) se calcula:

$$S = \frac{(a+b)}{2}\ .\ h$$ o también $$S = \frac{a^2 - b^2}{h}$$

Donde: $$\theta = \frac{a-b}{h}$$



Atención

Otras expresiones para el cálculo del área de un trapecio circular.

$$S = \frac{aR_1 - bR_2}{2}$$

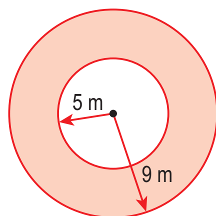
$$S = \frac{\theta}{2}(R_1^2 - R_2^2)$$



Ejemplos:

Calcula el valor del área de los trapecios circulares mostrados en cada caso:

a)



Resolución:

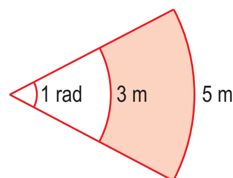
De los datos:

$S = \pi R_1^{\,2} - \pi R_2^{\,2}$

$\quad = \pi(9^2) - \pi(5^2)$

$\Rightarrow S = 56\pi\ m^2$

b)



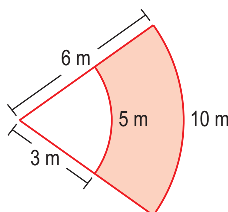
Resolución:
De los datos:

$S = \frac{a^2 - b^2}{2\theta}$

$= \frac{5^2 - 3^2}{2(1\ rad)} = \frac{16}{2}$

$\Rightarrow S = 8\ m^2$

c)



Resolución:
De los datos:

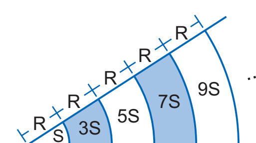
$S = \frac{aR_1 - bR_2}{2}$

$= \frac{10 \times 6 - 5 \times 3}{2} = \frac{45}{2}$

$\Rightarrow S = 22,5\ m^2$

Nota

Sea un sector circular de radio R y área S.



- El incremento de un mismo radio R, produce un incremento de área proporcional a los números impares de S.
- Se invita al estudiante a comprobar esta relación.

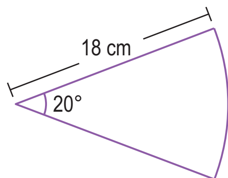
Problemas resueltos

1 Calcula la longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de 20° en una circunferencia con 18 cm de radio.

Resolución:

Se sabe:

$L = R \times \underbrace{\theta}_{\text{en radianes}}$



Usando el factor de conversión:

$L = 18 \times 20° \times \dfrac{\pi}{180°}$

$L = 2\pi$ cm

2 En un sector circular el ángulo central mide 110^g y el radio 60 cm. ¿Cuánto mide el arco?

Resolución:

Fórmula:

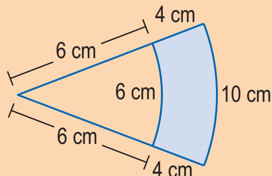
$L = R \times \underbrace{\theta}_{\text{en radianes}}$

Usando el factor de conversión:

$L = 60 \times 110^g \times \dfrac{\pi}{200^g}$

$L = 33\pi$ cm

3 Calcula el área de la región sombreada.

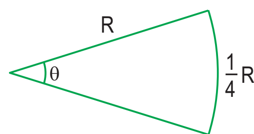


Resolución:

$A_{somb.} = A_{trapecio\ circular} = \left(\dfrac{a+b}{2}\right).h = \left(\dfrac{10+6}{2}\right) \times 4 = 32\ cm^2$

4 En un sector circular el arco resulta ser la cuarta parte del radio. ¿Cuánto mide el ángulo central?

Resolución:

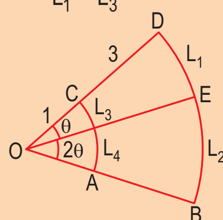


Dato: $L = \dfrac{1}{4}R$

Se sabe: $L = R \times \theta$

Igualando: $\dfrac{1}{4}R = R \times \theta \Rightarrow \theta = \dfrac{1}{4}$ rad

5 Del gráfico, calcula: $M = \dfrac{L_2 + L_4}{L_1 - L_3}$



Resolución:

Del gráfico:

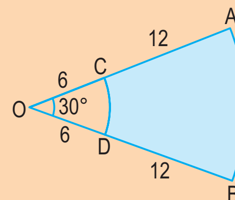
$L_1 = \theta \times 4 = 4\theta$ $\qquad L_3 = \theta \times 1 = \theta$

$L_2 = 2\theta \times 4 = 8\theta$ $\qquad L_4 = 2\theta \times 1 = 2\theta$

Reemplazando:

$M = \dfrac{8\theta + 2\theta}{4\theta - \theta} = \dfrac{10\theta}{3\theta} = \dfrac{10}{3}$

6 Del gráfico, calcula el perímetro de la región sombreada.



Resolución:

Piden el perímetro, entonces: $2p = CA + AB + DB + CD$

Hallamos AB y CD (longitudes de arco):

$CD = 30° \times \dfrac{\pi}{180°} \times 6 = \pi$

$AB = 30° \times \dfrac{\pi}{180°} \times 18 = 3\pi$

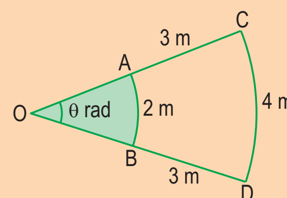
Sabemos que: $CA = DB = 12$

Reemplazando:

$2p = 12 + 3\pi + 12 + \pi$

$2p = 24 + 4\pi = 4(6 + \pi)$

7 En la figura, calcula el área del sector circular AOB.



Resolución:

Por propiedad: $\theta = \dfrac{a-b}{h}$ ... (1)

Datos: $a = 4$ m, $b = 2$ m y $h = 3$ m

En (1): $\theta = \dfrac{4-2}{3} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \theta = \dfrac{2}{3}$ rad

Luego, calculamos el área del sector circular AOB:

$S_{\triangleleft AOB} = \dfrac{L^2}{2\theta}$

Dato: $L = 2$ m

Reemplazando: $S_{\triangleleft AOB} = \dfrac{(2)^2}{2\left(\dfrac{2}{3}\right)} = \dfrac{4}{4} \cdot 3 = 3$

$S_{\triangleleft AOB} = 3$

$\therefore S_{\triangleleft AOB} = 3\ m^2$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

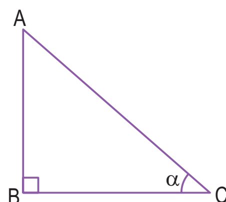
T

CONCEPTOS PREVIOS

Para las razones trigonométricas tener en cuenta los siguientes conceptos:

Triángulo rectángulo

Es aquel en el que uno de sus ángulos interiores es recto. Se llaman **catetos** a los lados que forman el ángulo recto, siendo la **hipotenusa** el lado correspondiente al ángulo recto.



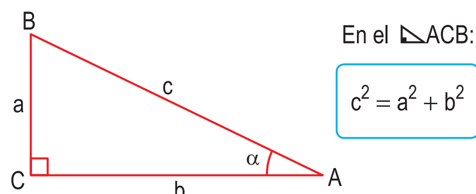
Posición relativa de los lados con respecto al ángulo α:

$\overline{AB}$: cateto opuesto de α.

$\overline{BC}$: cateto adyacente de α.

$\overline{AC}$: hipotenusa.

Teorema de Pitágoras. Se cumple para todo triángulo rectángulo: el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

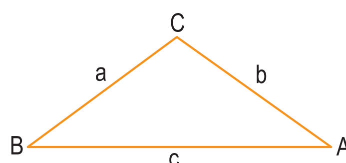


En el ◺ACB:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Razón

Una razón es la comparación de dos cantidades; en el triángulo comparamos la longitud de sus lados mediante su cociente.



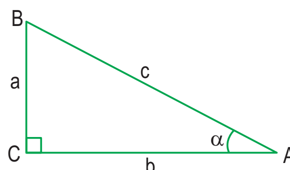
Comparando los lados de un triángulo obtenemos seis razones:

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}$$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

En el triángulo rectángulo, la razón de dos de sus lados con respecto a uno de sus ángulos agudos es una razón trigonométrica.

Sea un ángulo α en el triángulo rectángulo ACB



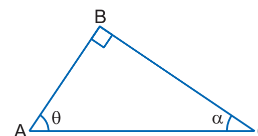
a: cateto opuesto a α (CO).

b: cateto adyacente a α (CA).

c: hipotenusa (H).

Nota

En el ◺ABC:



α y θ son ángulos agudos y complementarios, es decir:

$0 < \alpha < 90° \ \wedge \ 0 < \theta < 90°$

$\alpha + \theta = 90°$(complementarios)

Ten en cuenta

Como puedes observar, para demostrar las longitudes de los lados correspondientes a los ángulos A; B y C usamos las minúsculas de estos para asociar dichas longitudes con sus ángulos.



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En la siguiente tabla definimos las razones trigonométricas para el ángulo α:

Nombre	Definición	Abreviatura	En el ◺
Seno de α	$\frac{CO}{H}$	senα	sen$\alpha = \frac{a}{c}$
Coseno de α	$\frac{CA}{H}$	cosα	cos$\alpha = \frac{b}{c}$
Tangente de α	$\frac{CO}{CA}$	tanα	tan$\alpha = \frac{a}{b}$
Cotangente de α	$\frac{CA}{CO}$	cotα	cot$\alpha = \frac{b}{a}$
Secante de α	$\frac{H}{CA}$	secα	sec$\alpha = \frac{c}{b}$
Cosecante de α	$\frac{H}{CO}$	cscα	csc$\alpha = \frac{c}{a}$

Atención

Para un ángulo, conocida una razón trigonométrica, se pueden hallar las demás.



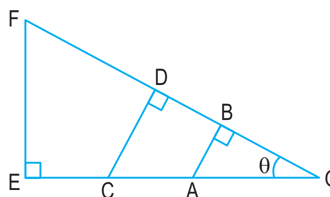
Propiedad

Las razones trigonométricas dependen únicamente de la medida del ángulo, es decir, no dependen de las longitudes de los lados del triángulo.

Observación

La propiedad se puede deducir del principio de semejanza de triángulos.

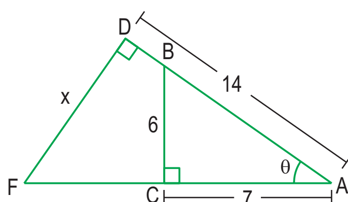




De los ◺OBA, ◺ODC y ◺OEF, la definición del senθ será: $\text{sen}\theta = \frac{AB}{AO} = \frac{CD}{CO} = \frac{EF}{FO}$

Ejemplo:

De la figura calcula x.



Resolución:

Del ◺ACB y ◺ADF:

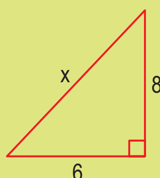
$\tan\theta = \frac{6}{7} = \frac{x}{14}$

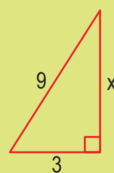
$\therefore\ x = 12$

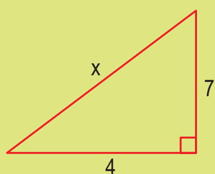
EFECTUAR

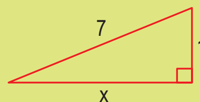
Grupo I

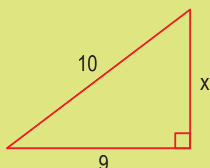
Halla x en cada caso.

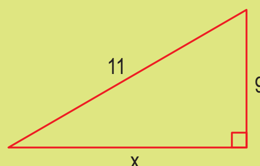










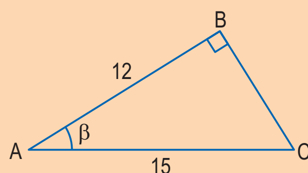


Grupo II

1. En un ◺ ABC recto en A, si a = 5 y b = $\sqrt{13}$. Halla tanc.
2. En un ◺, la hipotenusa es el triple de un cateto, calcula la tangente del mayor ángulo agudo.
3. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 1 m y 2 m. Calcula el seno del ángulo menor.
4. En un ◺ ABC recto en B, si a = $\sqrt{2}$ y c = $\sqrt{13}$ Halla secA.
5. En un ◺ ABC, recto en A, se sabe que: a = 13 m y b = 5 m. Calcula c.
6. En un ◺ ABC, recto en B, reduce: M = b. senA . tanc

Problemas resueltos

1 Del gráfico mostrado, calcula $\csc\beta$.



Resolución:

Del gráfico, por el teorema de Pitágoras:

$15^2 = 12^2 + BC^2$

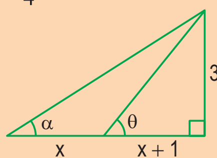
$BC^2 = 9^2 \Rightarrow BC = 9$

Piden $\csc\beta$:

$\csc\beta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

$\csc\beta = \dfrac{15}{9}$

2 En la figura, si $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$, calcula $\tan\alpha$.



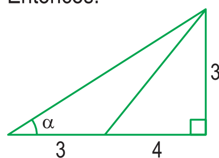
Resolución:

Dato: $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$

Del gráfico: $\tan\theta = \dfrac{3}{x+1}$

Igualamos: $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{x+1} \Rightarrow x = 3$

Entonces:



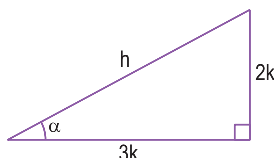
$\tan\alpha = \dfrac{3}{7}$

3 Si $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$, con α agudo.

Calcula: $M = \sqrt{13}\,\text{sen}\alpha - 1$

Resolución:

$\tan\alpha = \dfrac{2}{3} = \dfrac{CO}{CA} \Rightarrow \begin{array}{l} CO = 2k \\ CA = 3k \end{array}$



Aplicando el teorema de Pitágoras, hallamos la hipotenusa:

$h^2 = (3k)^2 + (2k)^2 = 9k^2 + 4k^2$

$h^2 = 13k^2$

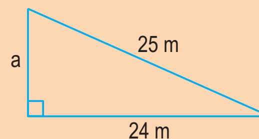
$h = \sqrt{13}\,k$

Nos piden el valor de M:

$M = \sqrt{13}\,\text{sen}\alpha - 1 = \sqrt{13}\left(\dfrac{CO}{h}\right) - 1 = \sqrt{13}\left(\dfrac{2k}{\sqrt{13}\,k}\right) - 1$

$\therefore M = 1$

4 Halla el perímetro del triángulo.



Resolución:

Para hallar el perímetro debemos primero tener el valor de a.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$25^2 = a^2 + 24^2$

$625 = a^2 + 576 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 625 - 576$

$a^2 = 49$

$\Rightarrow a = 7\text{ m}$

Nos piden el perímetro del triángulo.

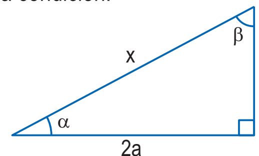
Entonces:

$a + 24 + 25 = 7 + 24 + 25 = 56\text{ m}$

5 En un triángulo rectángulo, un cateto es el doble del otro. Calcula el seno del mayor ángulo agudo.

Resolución:

Graficamos y de la condición:



Por el teorema de Pitagoras:

$x^2 = (2a)^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4a^2 + a^2$

$x^2 = 5a^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{5}\,a$

Siempre se cumple en un triángulo que a mayor longitud de un lado, mayor es el ángulo opuesto; entonces el mayor ángulo agudo es β.

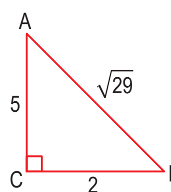
Luego: $\text{sen}\,\beta = \dfrac{2a}{x} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}\,a} \qquad \therefore\ \text{sen}\,\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

6 En un triángulo rectángulo ACB, recto en C, se cumple que $\tan A = \dfrac{2}{5}$. Calcula:

$E = \sqrt{116}\,\text{sen}A + 10\tan B$

Resolución:

En un gráfico:



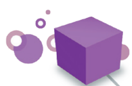
Por el teorema de Pitágoras:

$AB = \sqrt{29}$

Hallando E:

$E = \sqrt{116}\,\dfrac{2}{\sqrt{29}} + 10 \times \dfrac{5}{2}$

$E = 2\sqrt{29}\,\dfrac{2}{\sqrt{29}} + 25 \Rightarrow E = 29$

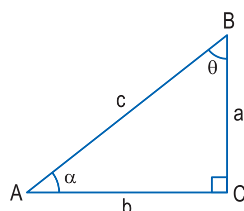


UNIDAD 2

PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Sean los ángulos agudos α y θ en el triángulo rectángulo ACB:



Por las definiciones de razones trigonométricas en el ◺ACB:

$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\theta = \cos(90° - \alpha)$ $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\theta = \tan(90° - \alpha)$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \text{sen}\theta = \text{sen}(90° - \alpha)$ $\sec\alpha = \frac{c}{b} = \csc\theta = \csc(90° - \alpha)$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\theta = \cot(90° - \alpha)$ $\csc\alpha = \frac{c}{a} = \sec\theta = \sec(90° - \alpha)$

Luego, concluimos que las razones trigonométricas de un ángulo agudo (α) es igual a las co-razones del complemento de dicho ángulo ($90° - \alpha$) es decir:

Razón trigonométrica (α) = Co-razón trigonométrica ($90° - \alpha$)

Ejemplos:

- $\text{sen}20° = \cos(90° - 20°) = \cos70°$
- $\tan18° = \cot(90° - 18°) = \cot72°$
- $\sec40° = \csc(90° - 40°) = \csc50°$
- $\cos(x + 10°) = \text{sen}x$; x agudo
  $\Rightarrow x + 10° + x = 90°$
  $2x = 80°$
  $\therefore\ x = 40°$
- $\tan3x = \cot2x$; 3x es agudo
  $\cot(90° - 3x) = \cot2x$
  $90° - 3x = 2x$
  $5x = 90°$
  $\therefore\ x = 18°$
- $\sec30° = \csc x$; x agudo
  $\Rightarrow 30° + x = 90°$ $\therefore x = 60°$

Importante

Cuando se cumpla:
senx = cosy
tanx = coty
secx = cscy
Se concluye que:
x + y = 90°



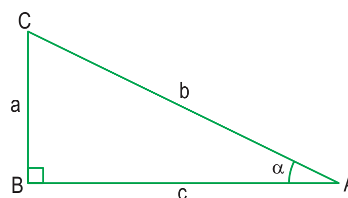
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

Del triángulo rectángulo ABC observamos:

$\text{sen}\alpha = \frac{a}{b}$ $\csc\alpha = \frac{b}{a}$

$\cos\alpha = \frac{c}{b}$ $\sec\alpha = \frac{b}{c}$

$\tan\alpha = \frac{a}{c}$ $\cot\alpha = \frac{c}{a}$



Para un mismo ángulo, dos razones trigonométricas son recíprocas si su producto es igual a la unidad. Entonces:

$\text{sen}\alpha\csc\alpha = 1$	seno y cosecante
$\cos\alpha\sec\alpha = 1$	coseno y secante
$\tan\alpha\cot\alpha = 1$	tangente y cotangente

→ son recíprocas

Ejemplos:

- $\text{sen}10°\csc10° = 1$
- $\cos35°\sec35° = 1$
- Si $\cos\beta = \frac{1}{7} \Rightarrow \sec\beta = 7$
- $\cos3x\sec48° = 1$; 3x es agudo.
  coseno y secante son razones recíprocas
  Luego:
  $3x = 48°$
  $\therefore\ x = 16°$

Observación

Para todo α; β; θ; x; y; z, ángulos agudos:

$\text{sen}\alpha\csc x = 1 \Rightarrow \alpha = x$
$\cos\theta\sec y = 1 \Rightarrow \theta = y$
$\tan\beta\cot z = 1 \Rightarrow \beta = z$



Problemas resueltos

1 Si se tiene que:
$\text{sen}(2a + b)° = \cos(3a - b)°$
Calcula el valor de:
$E = 3\tan(4a - 2)°\tan(a + 2)°$

Resolución:
Por ángulos complementarios
$(2a + b)° + (3a - b)° = 90°$
$2a + b + 3a - b = 90$
$a = 18$
Piden:
$E = 3\tan(4a - 2)°\tan(a + 2)°$
$E = 3\tan(4 \,.\, 18 - 2)°\tan(18 + 2)°$
$E = 3\tan70°\underbrace{\tan20°}_{\cot70°}$ (A. complementarios)
$E = 3\underbrace{\tan70°\cot70°}_{\text{recíprocas}}$
$\therefore\ E = 3$

2 Calcula $x + y$ sabiendo que:
$\cos(3x + 10°)\sec(y - 40°) = 1$
$\cot(2y - 65°) = \tan(55° - x)$

Resolución:
De la primera condición:
$\cos(3x + 10°)\sec(y - 40°) = 1$

Por RT recíprocas:
$3x + 10° = y - 40°$
$y - 3x = 50°$ ...(1)

De la segunda condición:
$\cot(2y - 65°) = \tan(55° - x)$

Por ángulos complementarios:
$2y - 65° + 55° - x = 90°$
$2y - x = 90° + 10°$
$2y - x = 100°$ ...(2)

De (1) y (2):
$y - 3x = 50°$; multiplicamos (1) por (2):
$\left.\begin{array}{r} 2y - 6x = 100° \\ 2y - x = 100° \end{array}\right\}$ restando

$-5x = 0° \Rightarrow x = 0°$
$y = 50°$

Piden: $x + y = 50°$

3 Señala lo incorrecto:

A) $\tan36°\tan54° = 1$
B) $\text{sen}\,\frac{2\pi}{7}\sec\frac{3\pi}{14} = 1$
C) $\cos\frac{4\pi}{11} - \text{sen}\frac{3\pi}{22} = 0$
D) $\sec\frac{6\pi}{13} = \csc\frac{3\pi}{26}$
E) $\cos42°\csc48° = 1$

Resolución:
A) $\tan36°\underbrace{\tan54°}_{\cot36°} = 1$

$\Rightarrow \tan36°\cot36° = 1$ ... (V)

B) $\underbrace{\text{sen}\frac{2\pi}{7}}_{\cos\frac{3\pi}{14}}\sec\frac{3\pi}{14} = 1$

$\Rightarrow \cos\frac{3\pi}{14}\sec\frac{3\pi}{14} = 1$ ... (V)

C) $\cos\,\frac{4\pi}{11} - \text{sen}\frac{3\pi}{22} = 0$

$\cos\frac{4\pi}{11} = \text{sen}\frac{3\pi}{22}$

$\Rightarrow \frac{4\pi}{11} + \frac{3\pi}{22}$ (Deben ser complementarios)

$\frac{4\pi}{11} + \frac{3\pi}{22} = \frac{\pi}{2}$ ... (V)

D) $\sec\frac{6\pi}{13} = \csc\frac{3\pi}{26}$

$\Rightarrow \frac{6\pi}{13}$ y $\frac{3\pi}{26}$ (Deben ser complementarios)

$\frac{6\pi}{13} + \frac{3\pi}{26} = \frac{15\pi}{26} \neq \frac{\pi}{2}$ ... (F)

E) $\cos42°\underbrace{\csc48°}_{\sec42°} = 1$

$\Rightarrow \cos42°\sec42° = 1$ ... (V)

4 Halla x en:
$\text{sen}25°\sec3x = \cos65°\csc(x + 10°)$

Resolución:
Se deduce: $\text{sen}25° = \cos65°$
Porque: $25° + 65° = 90°$
$\text{sen}25°\sec3x = \text{sen}25°\csc(x + 10°)$
$\sec3x = \csc(x + 10°)$
Debe cumplir:
$3x + x + 10° = 90°$
$4x = 80°$
$x = 20°$

5 Halla x de las siguientes condiciones:
$\text{sen}(\alpha + \theta)\csc70° = 1$ ...(I)
$\text{sen}(x + \alpha) = \cos\theta$ ...(II)

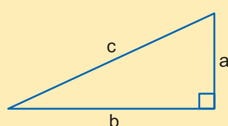
Resolución:
De (I): $\alpha + \theta = 70°$
De (II): $x + \underbrace{\alpha + \theta}_{70°} = 90°$
$x = 20°$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

Importante

Terna pitagórica
Lo forman 3 números naturales a; b; c que cumplen con el teorema de Pitágoras; por lo tanto son las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



a; b; c: terna pitagórica

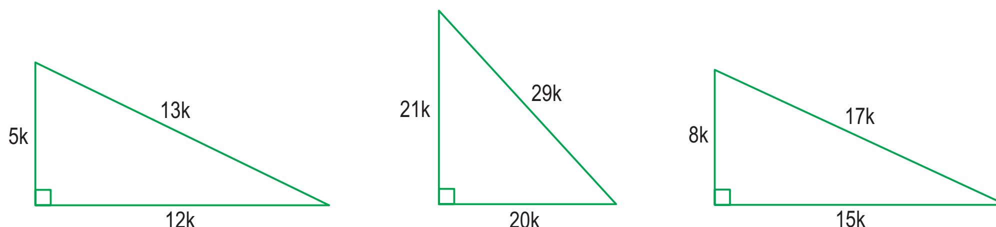


TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Son aquellos triángulos rectángulos donde la proporción entre sus lados y/o la medida de sus ángulos agudos es conocida.

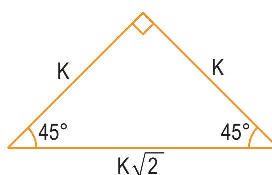
Triángulos rectángulos pitagóricos

Son triángulos rectángulos cuya medida de sus lados está expresada por números enteros.

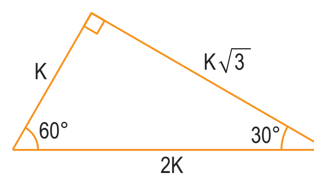


Triángulos rectángulos exactos

De 45°

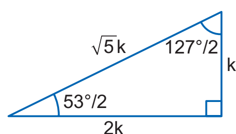


De 30° y 60°



Nota

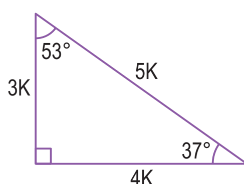
De $\frac{53°}{2}$ y $\frac{127°}{2}$:



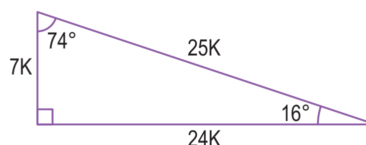
Triángulos rectángulos aproximados

Son aquellos triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos han sido aproximados.

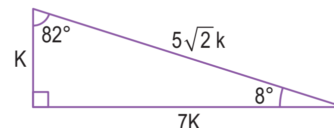
De 37° y 53°



De 16° y 74°

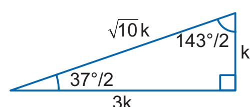


De 8° y 82°



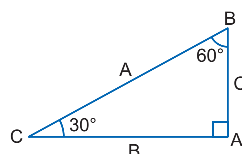
Nota

De $\frac{37°}{2}$ y $\frac{143°}{2}$:

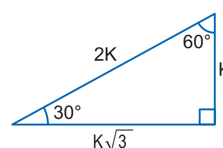


En un triángulo rectángulo, si conocemos las medidas de sus ángulos agudos (notables) podemos obtener la proporción entre sus lados.

Ejemplo:
De la figura calcula **b** y **c** si **a** es igual a 4.



Resolución:
⊿ Notable de 30° y 60°



$a = 2k = 4 \Rightarrow k = 2$
$b = k\sqrt{3} \quad \wedge \quad c = k$
$\therefore\ b = 2\sqrt{3} \quad \wedge \ c = 2$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

De los triángulos rectángulos notables cuyas medidas de sus ángulos agudos son conocidas (ángulos notables), podemos obtener sus razones trigonométricas.

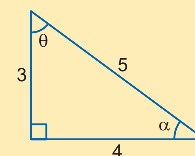
	16°	30°	37°	45°	53°	60°	74°
seno	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{24}{25}$
coseno	$\frac{24}{25}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{25}$
tangente	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{24}{7}$
cotangente	$\frac{24}{7}$	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{7}{24}$
secante	$\frac{25}{24}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{25}{7}$
cosecante	$\frac{25}{7}$	2	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{25}{24}$



Observación

Al usar un transportador para medir los ángulos agudos de un triángulo rectángulo aproximado se puede verificar que dichos ángulos han sido aproximados.

Ejemplo:



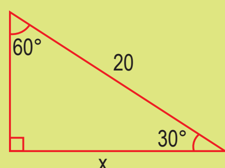
- Notable 37° y 53°
  $\alpha = 37°$
  $\theta = 53°$
- Con una calculadora científica:
  $\alpha = 36°\ 52'\ 11{,}63''$
  $\theta = 53°\ 7'\ 48{,}37''$

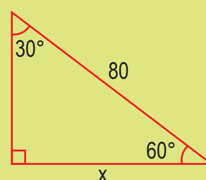
Completando el cuadro según las razones trigonométricas de los ángulos notables adicionales:

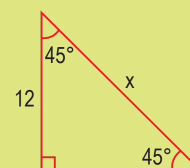
	8°	$\frac{37°}{2}$	$\frac{53°}{2}$	$\frac{127°}{2}$	$\frac{143°}{2}$	82°
sen	$\frac{1}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{7}{5\sqrt{2}}$
cos	$\frac{7}{5\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{5\sqrt{2}}$
tan	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3	7
cot	7	3	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
sec	$\frac{5\sqrt{2}}{7}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$5\sqrt{2}$
csc	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\frac{5\sqrt{2}}{7}$

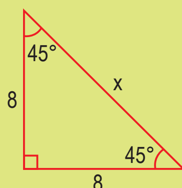
EFECTUAR

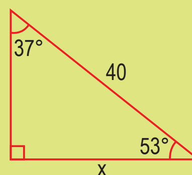
Halla x en cada caso.

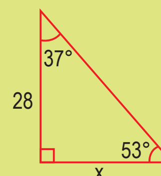
1. 

2. 

3. 

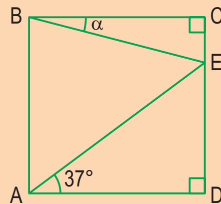
4. 

5. 

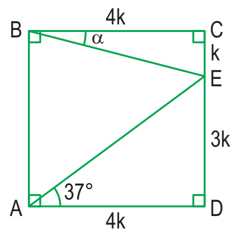
6. 

Problemas resueltos

1 Si ABCD es un cuadrado, halla $\tan\alpha$.



Resolución:



⊿ADE notable de 37° y 53°.

$AD = 4k \ \wedge\ ED = 3k$

ABCD cuadrado

$AD = DC$

$4k = 3k + EC$

$EC = k$

Luego:

$\tan\alpha = \dfrac{EC}{BC} = \dfrac{k}{4k}$ $\qquad\therefore\ \tan\alpha = \dfrac{1}{4}$

2 Calcula:

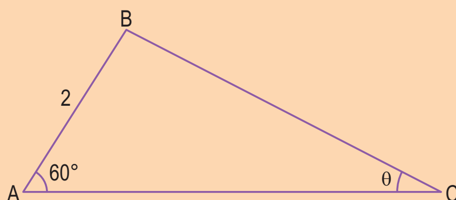
$$M = \frac{\cos 37° + \text{sen}30°}{\tan\frac{53°}{2} + \text{sen}16°}$$

Resolución:

$$M = \frac{\cos 37° + \text{sen}30°}{\tan\frac{53°}{2} + \text{sen}16°} \Rightarrow M = \frac{\frac{4}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{7}{25}}$$

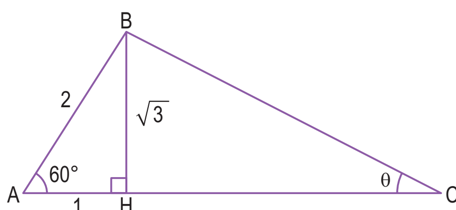
$$M = \frac{\frac{13}{10}}{\frac{39}{50}} \qquad \therefore\ M = \frac{5}{3}$$

3 Calcula AC, si $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

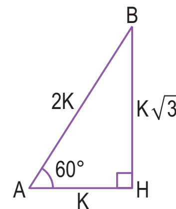


Resolución:

Del gráfico, trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$:



⊿AHB notable de 30° y 60°.



$AB = 2k = 2$

$\Rightarrow k = 1$

$BH = \sqrt{3} \ \wedge\ AH = 1$

Luego:

$\tan\theta = \dfrac{BH}{HC}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{HC}$

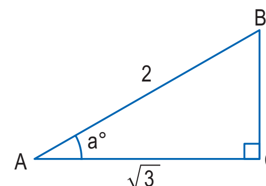
$HC = 5$ $\qquad\therefore\ AC = AH + HC = 6$

4 Si $\cos a° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; a° agudo.

Calcula $\tan\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\circ}$

Resolución:

En el gráfico ⊿ACB; a° agudo.



$\cos a° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Luego:

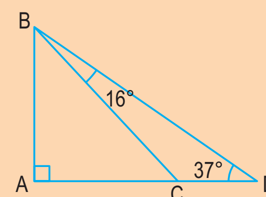
ACB ⊿ notable 30° y 60°

$a° = 30°$

$\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\circ} = 45°$

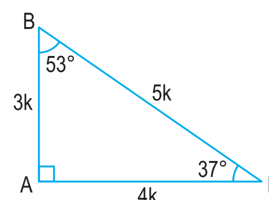
$\therefore\ \tan\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\circ} = \tan 45° = 1$

5 Calcula AC si BD es igual a 40.



Resolución:

En el gráfico ⊿BAD notable de 37° y 53°.



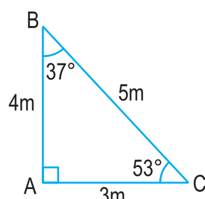
$BD = 5k = 40$

$\Rightarrow k = 8$

$AB = 3k = 3 \,.\, 8$

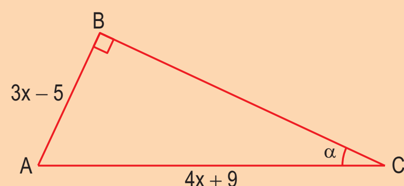
$AB = 24$

$\triangle$BAC notable de 37° y 53°.



AB = 4m = 24
$\Rightarrow$ m = 6
AC = 3m = 3 . 6
$\therefore$ AC = 18

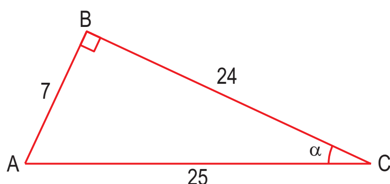
6 Calcula tanα, cuando x es igual a 4.



Resolución:

Para x = 4

- 3x – 5 = 3(4) – 5
  3x – 5 = 7
- 4x + 9 = 4 . 4 + 9
  4x + 9 = 25



Luego $\triangle$ABC notable de 16° y 74°.

$\alpha = 16°$

$\therefore \ \tan\alpha = \tan 16° = \dfrac{7}{24}$

7 Calcula x.
5xsen37° + cos60° = xcot8° – tan53°/2

Resolución:

5xsen37° + cos60° = xcot8° – tan53°/2

$$5x\,.\,\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = x\,.\,7 - \frac{1}{2}$$
$$1 = 4x$$
$$\therefore \ x = \frac{1}{4}$$

8 Efectúa:
R = 5sen53° + 6tan53° + cot45°

Resolución:

R = 5sen53° + 6tan53° + cot45°

$R = 5\,.\,\dfrac{4}{5} + 6\,.\,\dfrac{4}{3} + 1$

R = 4 + 8 + 1

R = 13

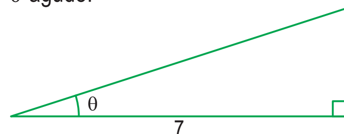
9 Calcula θ agudo si se cumple:

$$\tan\theta = \frac{\tan 45°}{3\sec 60° + 1}$$

Resolución:

$$\tan\theta = \frac{\tan 45°}{3\sec 60° + 1} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3.2+1} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{7}$$

θ agudo:



$\triangle$ notable de 8° y 82°

$\therefore \ \theta = 8°$

10 Halla x en: $\dfrac{x - \text{sen}30°}{x + 2\text{sen}^2 45°} = \text{sen}37° - \dfrac{1}{5}$

Resolución:

$$\frac{x - \text{sen}30°}{x + 2\text{sen}^2 45°} = \text{sen}37° - \frac{1}{5}$$

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{x + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{x + 1} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x - \frac{5}{2} = 2x + 2 \Rightarrow 3x = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

11 Si: tanx = 2sen30° + cos60°; halla $\sqrt{13}$ cosx

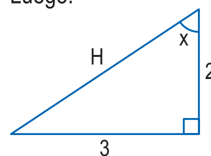
Resolución:

tanx = 2sen30° + cos60°

$= 2\,.\,\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$

$\tan x = \dfrac{3}{2}$

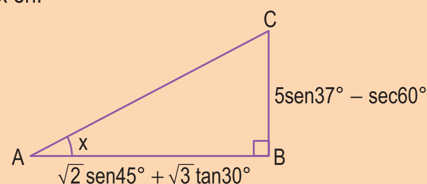
Luego:



$H^2 = 2^2 + 3^2$
$H^2 = 4 + 9$
$H^2 = 13$
$H = \sqrt{13}$

Piden: $\sqrt{13}\cos x = \sqrt{13}\,.\,\dfrac{2}{\sqrt{13}} = 2$

12 Halla tanx en:



Resolución:

$\sqrt{2}\,\text{sen}45° + \sqrt{3}\tan 30° = \sqrt{2}\,.\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}\,.\,\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow AB = 2$

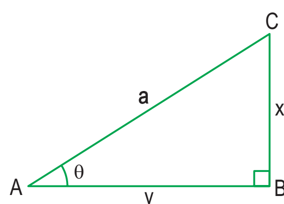
$5\text{sen}37° - \sec 60° = 5\,.\,\dfrac{3}{5} - 2 = 1 \Rightarrow BC = 1$

Piden: $\tan x = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{2}$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Cuando en un triángulo rectángulo se conoce uno de sus lados y uno de sus ángulos agudos, es posible determinar sus otros dos lados así como también su otro ángulo agudo.
Se presentan 3 casos:

Caso I
Conocidos la hipotenusa (a) y un ángulo agudo (θ)

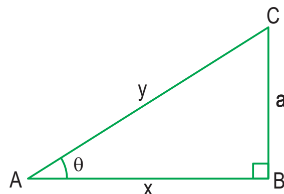


Del gráfico:

$\frac{x}{a} = \text{sen}\theta \Rightarrow x = a\text{sen}\theta$

$\frac{y}{a} = \cos\theta \Rightarrow y = a\cos\theta$

Caso II
Conocidos un ángulo agudo (θ) y su cateto opuesto (a)

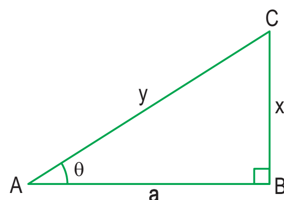


Del gráfico:

$\frac{x}{a} = \cot\theta \Rightarrow x = a\cot\theta$

$\frac{y}{a} = \csc\theta \Rightarrow y = a\csc\theta$

Caso III
Conocidos un ángulo agudo (θ) y su cateto adyacente (a)



Del gráfico:

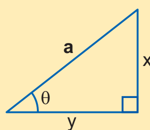
$\frac{x}{a} = \tan\theta \Rightarrow x = a\tan\theta$

$\frac{y}{b} = \sec\theta \Rightarrow y = a\sec\theta$



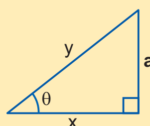
Recuerda

1.



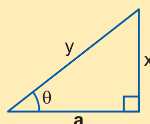
$x = a\text{sen}\theta$
$y = a\cos\theta$

2.



$x = a\cot\theta$
$y = a\csc\theta$

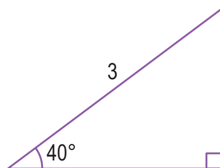
3.



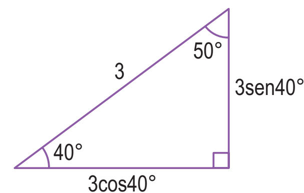
$x = a\tan\theta$
$y = a\sec\theta$

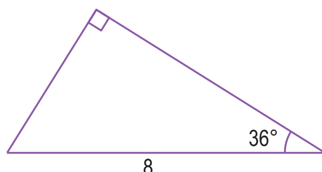
Ejemplos:
Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:

Caso I

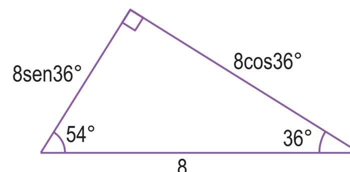


$\Rightarrow$

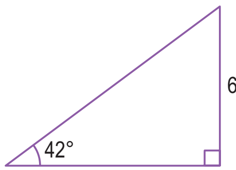




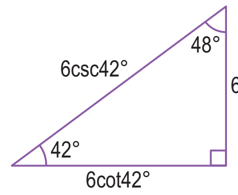
$\Rightarrow$

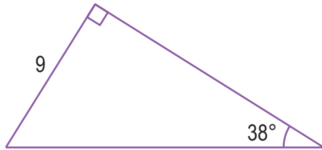


Caso II

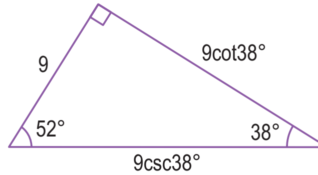


⇒





⇒

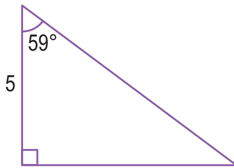


Observación

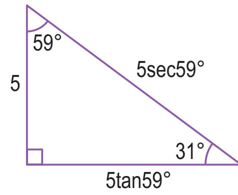
Resolver un triángulo rectángulo significa determinar la medida de sus tres lados y sus tres ángulos para lograr este objetivo debemos tener como mínimo dos elementos (datos), donde uno de ellos debe ser un lado.

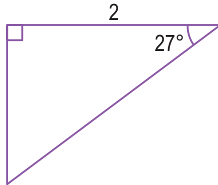


Caso III

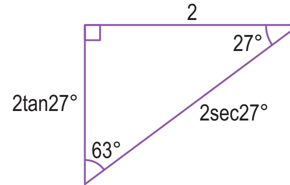


⇒



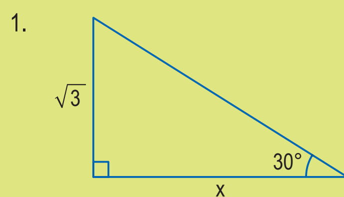


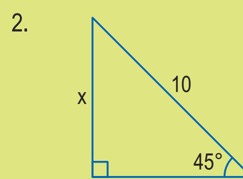
⇒

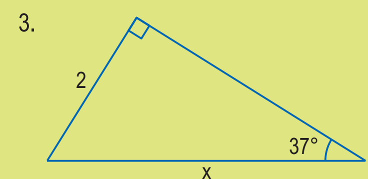


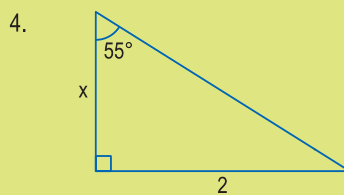
EFECTUAR

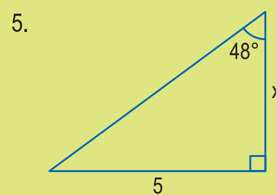
Halla x en cada caso.

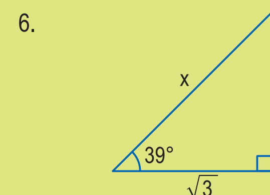
1. 

2. 

3. 

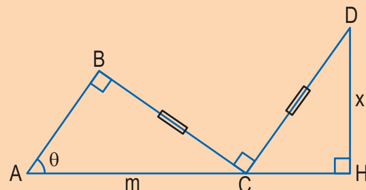
4. 

5. 

6. 

Problemas resueltos

1 Del gráfico, halla x.



Resolución:

Del gráfico, en el ⊿ABC:

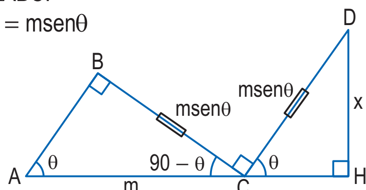
BC = msenθ ⇒ CD = msenθ

En el ⊿CHD:

x = CDsenθ

x = msenθsenθ

$x = \text{msen}^2\theta$



2 En un trapecio isósceles, los lados no paralelos son iguales a la base menor y forman un ángulo agudo θ con la base mayor. Si la base menor mide L, ¿cuál es el perímetro del trapecio?

Resolución:

Sea el trapecio ABCD:

Perímetro = AB + BC + CD + AD

Perímetro = L + L + L + $\overbrace{AP + L + QD}$

Perímetro = 4L + AP + QD

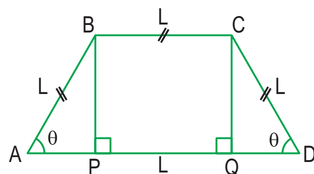
Hallamos AP y QD:

AP = Lcosθ = QD

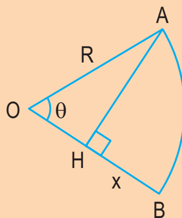
Entonces:

Perímetro = 4L + 2Lcosθ

Perímetro = 2L(2 + cosθ)



3 Del gráfico, obtén x en función de R y θ, (O centro de la circunferencia).



Resolución:

Se deduce que: OB = R

En el ⊿OHA (conocidos un ángulo agudo y la hipotenusa):

OH = Rcosθ

HA = Rsenθ

Entonces:

x = OB – OH ⇒ x = R – Rcosθ ⇒ x = R(1 – cosθ)

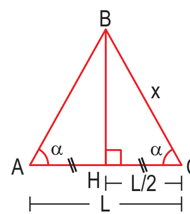
4 En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se sabe que los ángulos congruentes miden α, mientras que el lado desigual mide L. Halla uno de los lados congruentes.

Resolución:

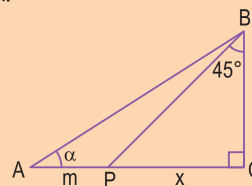
Sea el triángulo ABC:

La altura en un △ isósceles es también mediana, entonces: $HC = \frac{L}{2}$

Se conocen un ángulo agudo y el cateto adyacente, entonces: $x = \frac{L}{2}\sec\alpha$



5 Del gráfico, halla x.



Resolución:

Del gráfico:

En el ⊿ PCB(45°; 45°): BC = x

En el ⊿ ACB:

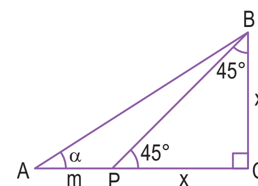
BC = x = (m + x)tanα

x = mtanα + xtanα

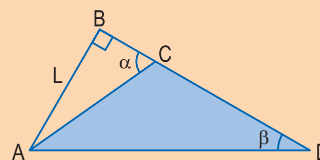
x – xtanα = mtanα

x(1 – tanα) = mtanα

$$x = \frac{m\tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$$



6 De acuerdo al gráfico, halla el área de la región sombreada.



Resolución:

Del gráfico, en el ⊿ABD:

BD = Lcotβ

En el ⊿ABC:

BC = Lcotα

Pero: CD = BD – BC

CD = Lcotβ – Lcotα = L(cotβ – cotα)

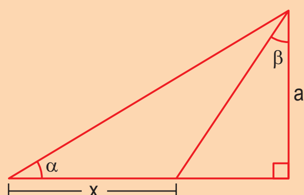
Piden el área del triángulo:

$$A_{\triangle ACD} = \frac{CD \times AB}{2}$$

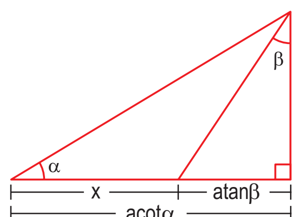
$$A_{\triangle ACD} = \frac{L(\cot\beta - \cot\alpha) \times L}{2}$$

$$A_{\triangle ACD} = \frac{L^2}{2}(\cot\beta - \cot\alpha)$$

7 Del gráfico, halla x.



Resolución:



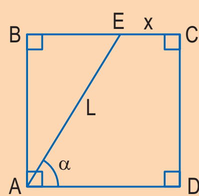
Del gráfico:

$x + a\tan\beta = a\cot\alpha$

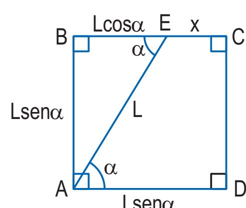
$x = a\cot\alpha - a\tan\beta$

$x = a(\cot\alpha - \tan\beta)$

8 Si ABCD es un cuadrado, halla x en términos de L y α.



Resolución:



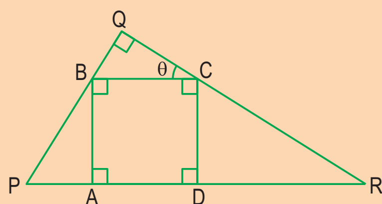
Del gráfico:

$L\cos\alpha + x = L\operatorname{sen}\alpha$

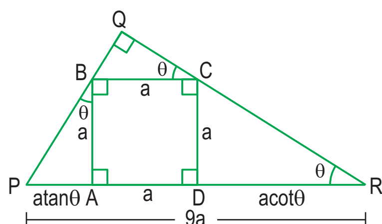
$x = L\operatorname{sen}\alpha - L\cos\alpha$

$x = L(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)$

9 Si ABCD es un cuadrado y PR = 9BC, halla $\tan\theta + \cot\theta$.



Resolución:



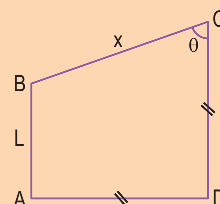
Del gráfico:

$a\tan\theta + a + a\cot\theta = 9a$

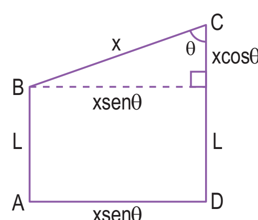
$a\tan\theta + a\cot\theta = 8a$

$a(\tan\theta + \cot\theta) = 8a$ $\therefore \tan\theta + \cot\theta = 8$

10 Del gráfico, halla x en función de L y θ.



Resolución:



Según el dato:

$AD = CD$

$x\operatorname{sen}\theta = x\cos\theta + L$

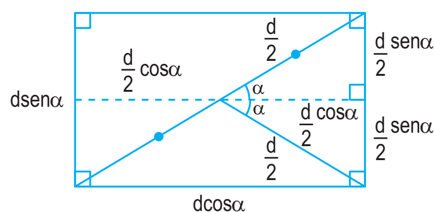
$x\operatorname{sen}\theta - x\cos\theta = L$

$x(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) = L$

$\therefore x = \dfrac{L}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

11 En un rectángulo, las diagonales miden "d" y forman un ángulo agudo de 2α. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

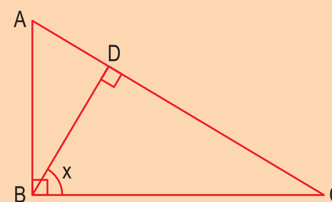
Resolución:



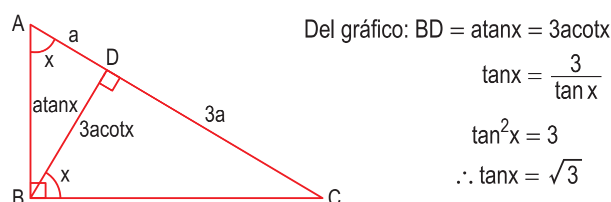
Del gráfico: Perímetro $= 2p = 2d\operatorname{sen}\alpha + 2d(\cos\alpha)$

$= 2d(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$

12 Del gráfico, calcula tanx. Si DC = 3AD



Resolución:



Del gráfico: $BD = a\tan x = 3a\cot x$

$\tan x = \dfrac{3}{\tan x}$

$\tan^2 x = 3$

$\therefore \tan x = \sqrt{3}$



UNIDAD 3

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

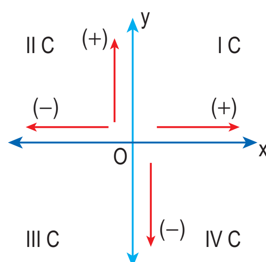
Nota

- El punto de origen tiene las coordenadas (0; 0), es decir:
O(0, 0): punto de origen.

Se denomina de esta manera al sistema formado por dos rectas numéricas que se intersecan perpendicularmente en cero.
A las rectas intersectadas las llamaremos ejes coordenados y al punto de intersección lo llamaremos origen.

PLANO CARTESIANO

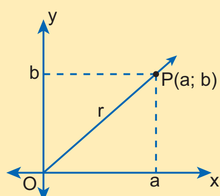
Es el plano determinado por los ejes coordenados y está dividido en cuatro regiones llamadas cuadrantes. Observa al siguiente gráfico:



Donde:
x: eje de las abscisas.
y: eje de las ordenadas.
O: punto de origen.

Atención

El radio vector es la distancia desde un punto en el plano cartesiano hasta el origen.



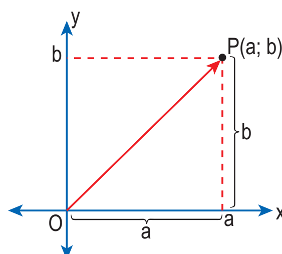
r: radio vector

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $r > 0$



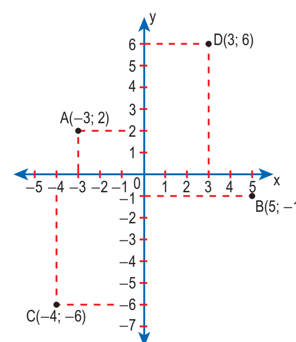
UBICACIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO CARTESIANO

Un punto es ubicado en el plano cartesiano, cuando se conocen los valores que le corresponden a la proyección del punto sobre cada uno de los ejes coordenados. En el gráfico, ubicaremos el punto P(a; b).



Donde:
a y b son componentes de P.
a: abscisa de P.
b: ordenada de P.
$\overline{OP}$: radio vector.

Ejemplo:
Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano:
A(–3; 2), B(5; –1); C(–4; –6) y D(3; 6)



Observación

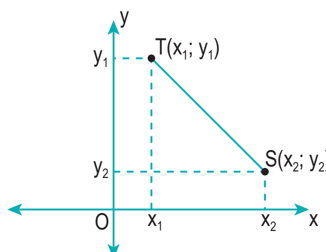
Debes tener en cuenta que cualquier distancia entre puntos siempre será un valor positivo, es decir:

$d \geqslant 0$



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

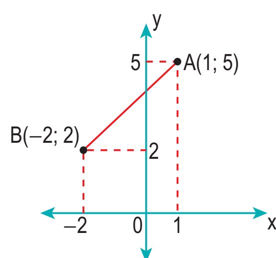
Dados los puntos $T(x_1; y_1)$ y $S(x_2; y_2)$ la distancia que los une se calculará de la siguiente forma:



$$d(T; S) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejemplo:
Calcula la distancia que une los puntos A(1; 5) y B(–2; 2).

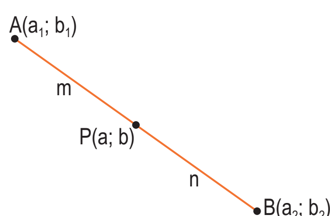
Resolución:



$$d(A;B)=\sqrt{(1-(-2))^2+(5-2)^2}$$
$$d(A;B)=\sqrt{(3)^2+(3)^2}$$
$$d(A;B)=\sqrt{18}$$
$$d(A;B)=3\sqrt{2}$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

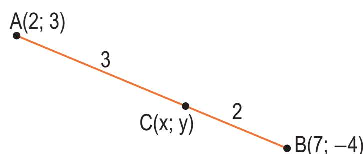
Sean $A(a_1; b_1)$ y $B(a_2; b_2)$ puntos extremos de un segmento y P un punto cualquiera entre A y B. Dada la razón $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$, las coordenadas del punto P serán:



$$a=\frac{na_1+ma_2}{n+m}$$

$$b=\frac{nb_1+mb_2}{n+m}$$

Ejemplo:
Del siguiente gráfico, calcula las coordenadas de C si: $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{2}$



Resolución:
Por dato sabemos que la razón entre ambas distancias es 3/2, luego, las coordenadas de C son:

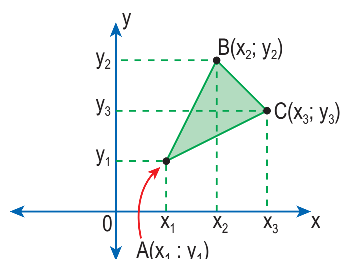
$$x=\frac{2\times 2+3\times 7}{2+3}$$
$$x=\frac{4+21}{5}$$
$$x=5$$

$$y=\frac{2\times 3+(3)(-4)}{2+3}$$
$$y=\frac{6-12}{5}$$
$$y=-\frac{6}{5}$$

Por lo tanto, las coordenadas de C son $\left(5; -\frac{6}{5}\right)$.

ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Podemos hallar el área de un triángulo cualquiera conociendo solamente las coordenadas de sus tres vértices, realizando la siguiente operación:



$$(+)\left\{\begin{matrix} x_1x_2 \\ x_3y_1 \\ x_2y_3 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} x_2y_1 \\ x_1y_3 \\ x_3y_2 \end{matrix}\right\}(+)$$

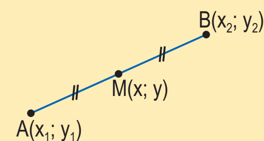
$$\underline{\quad}\ \ M \qquad\qquad \underline{\quad}\ \ N$$

$$S_\Delta=\frac{|N-M|}{2}$$

S_Δ: Área del triángulo

Atención

Sea M(x; y) punto medio de $\overline{AB}$, entonces:

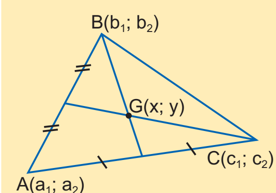


$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$



Atención

Sea G(x; y) el baricentro de un triángulo ABC, entonces:



$$x=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}$$

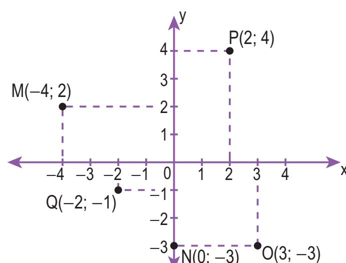
$$y=\frac{a_2+b_2+c_2}{3}$$



Problemas resueltos

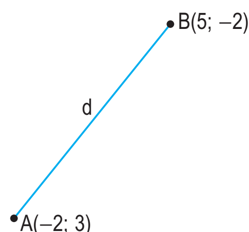
1 Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano: M(–4; 2); N(0; –3), O(3; –3); P(2; 4); Q(–2; –1)

Resolución:



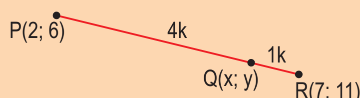
2 Halla la distancia entre los puntos A(–2; 3) y B(5; –2).

Resolución:



$$d = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-(-2))^2}$$
$$d = \sqrt{(-7)^2 + (5)^2}$$
$$d = \sqrt{49 + 25}$$
$$\therefore d = \sqrt{74}$$

3 Del siguiente gráfico, calcula las coordenadas de Q; si $\frac{PQ}{QR} = \frac{4}{1}$.



Resolución:

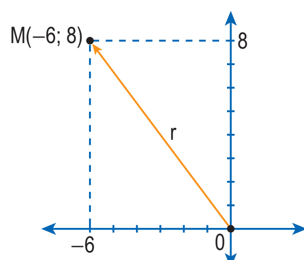
$$x = \frac{(1k)(2) + (4k)(7)}{4k + k} \Rightarrow \frac{30k}{5k} \Rightarrow x = 6$$

$$y = \frac{(1k)(6) + (4k)(11)}{4k + k} \Rightarrow \frac{50k}{5k} \Rightarrow y = 10$$

$$\therefore Q(6; 10)$$

4 Halla el radio vector para el punto M(–6; 8).

Resolución:

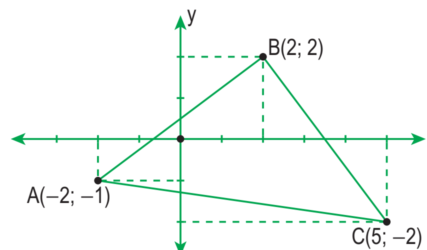


$$r = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$$
$$r = \sqrt{36 + 64}$$
$$r = \sqrt{100}$$
$$\therefore r = 10$$

5 Dados los puntos A(–2; –1), B(2; 2) y C(5; –2); los cuales son los vértices de un triángulo. ¿De qué triángulo se trata?

Resolución:

Graficando el triángulo:



Para saber qué clase de triángulo es, se hallarán las longitudes de sus lados.

Se sabe: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Reemplazando:

$$AB = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-1))^2}$$
$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$
$$BC = \sqrt{(2-5)^2 + (2-(-2))^2}$$
$$BC = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$$
$$AC = \sqrt{(-2-5)^2 + (-1-(-2))^2}$$
$$AC = \sqrt{(-7)^2 + (1)^2} = 5\sqrt{2}$$

El triángulo ABC es isósceles y rectángulo porque:
AB = BC = 5

Además: $AB^2 + BC^2 = AC^2$
$5^2 + 5^2 = (5\sqrt{2})^2$

6 Halla las coordenadas del baricentro del triángulo ABC, si se sabe que A(0; 0), B(33; 56) y C(63; 16).

Resolución:

Se sabe que

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

G: Baricentro del triángulo

Entonces, del problema:

$x_1 = 0$ $x_2 = 33$ $x_3 = 63$
$y_1 = 0$ $y_2 = 56$ $y_3 = 16$

Reemplazando:

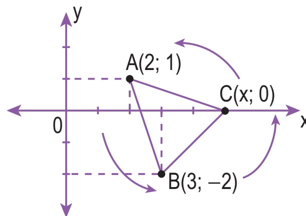
$$G = \left(\frac{0 + 33 + 63}{3}; \frac{0 + 56 + 16}{3}\right)$$

G = (32; 24)

7 El área de un triángulo es igual a 4 unidades cuadradas. Si dos de sus vértices son los puntos A(2; 1) y B(3; –2) y el tercer vértice C está situado en el eje de abscisas, en la parte positiva. Determina las coordenadas de dicho vértice.

Resolución:

Graficando:



Nos piden C, pero según dato C está en el eje de abscisas positivas, entonces:

$C = (x; 0) \wedge x > 0$

Pero: $A_{\triangle} = 4 \Rightarrow 4 = \dfrac{|D - I|}{2}$

Ahora:

$$\begin{array}{r|cc|l} & 2 & 1 & \\ & 3 & -2 & \\ 3 & x & 0 & -4 \\ -2x & 2 & 1 & 0 \\ 0 & & & x \\ \hline I = 3 - 2x & & & x - 4 = D \end{array}$$

Reemplazando:

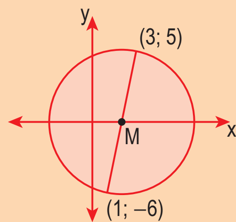
$4 = \dfrac{|x - 4 - 3 + 2x|}{2}$

$8 = 3x - 7$

$x = 5$

Entonces: $C(5; 0)$

8 Determina el área de la circunferencia de centro M:



Resolución:

Determinamos el diámetro:

$2R = \sqrt{(3-1)^2 + (5-(-6))^2}$

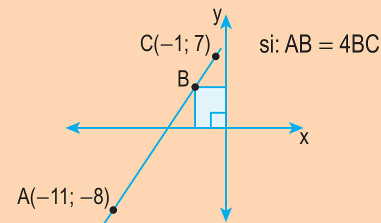
$2R = \sqrt{2^2 + 11^2}$

$\Rightarrow R^2 = \dfrac{125}{4}$

Sabemos: $S_{\odot} = \pi R^2 \Rightarrow S_{\odot} = \pi\left(\dfrac{125}{4}\right)$

$\therefore S_{\odot} = \dfrac{125\pi}{4}$

9 Calcula el área de la región sombreada:



Resolución:

Determinamos el punto B(x; y).

Del dato $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{1} \Rightarrow AB = 4k$ y $BC = k$

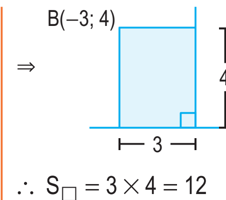
Aplicamos la propiedad para el punto B en una razón dada:

$x = \dfrac{4k(-1) + k(-11)}{5k}$

$x = \dfrac{-15k}{5k} = -3$

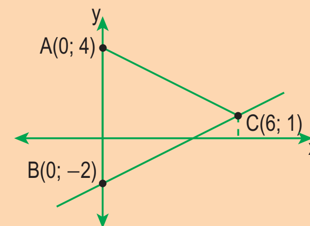
$y = \dfrac{4k(7) + k(8)}{5k} = \dfrac{20k}{5k} = 4$

$\Rightarrow$



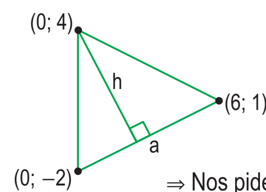
$\therefore S_{\square} = 3 \times 4 = 12$

10 Determina la distancia mínima del vético A al lado BC.



Resolución:

La distancia es la altura del triángulo.



$\Rightarrow$ Nos piden h.

Sabemos que el área del triángulo es: $S_{\triangle} = \dfrac{ha}{2}$ ...(1)

También:

$$S_{\triangle} = \begin{array}{r|cc|l} & 6 & 1 & \\ 0 & 0 & 4 & 24 \\ -8 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -2 \\ \hline -8 & & & 22 \end{array}$$

$\Rightarrow S_{\triangle} = \dfrac{|22 - (-8)|}{2} = 15$

En (1):

$15 = \dfrac{h \cdot a}{2}$

$30 = h \cdot a$

$a = \sqrt{(6-0)^2 + (1-(-2))^2}$

$a = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$a = 3\sqrt{5}$

Reemplazamos **a**:

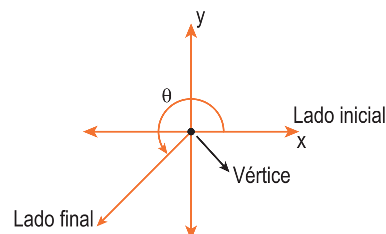
$\Rightarrow h = \dfrac{30}{3\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

$\therefore$ La distancia mínima de A hacia $\overline{BC}$ es $2\sqrt{5}$.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN CUALQUIER MAGNITUD

ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Un ángulo trigonométrico se encuentra en posición normal cuando su vértice coincide con el origen de coordenadas y su lado inicial coincide con el eje de las abscisas, además su lado terminal puede encontrarse en cualquier cuadrante o coincidir con alguno de los ejes coordenados.



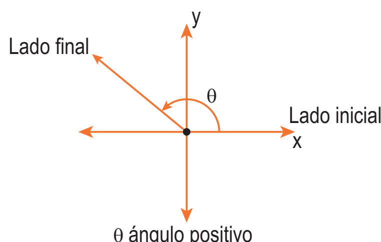
Atención

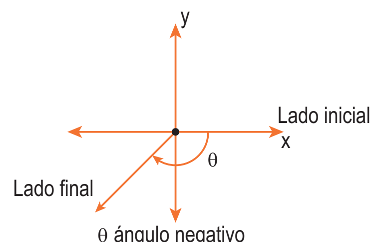
Un ángulo cuadrantal es aquel ángulo en posición normal cuyo lado terminal coincide con un eje del plano cartesiano.

Ejemplos:
0°; 90°; 180°; 270° y 360°.

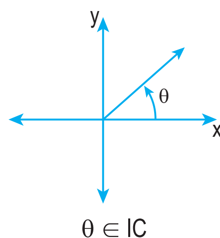


Un ángulo en posición normal puede ser un ángulo positivo si su rotación es en sentido contrario a las manecillas del reloj y si es en el mismo sentido, se obtiene un ángulo negativo. En el gráfico:

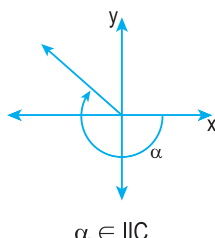




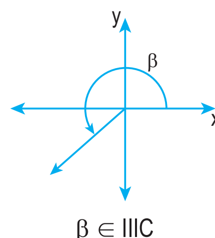
Además dependiendo de la ubicación del lado final se dirá que dicho ángulo pertenece a un determinado cuadrante.



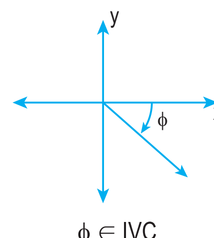
$\theta \in IC$



$\alpha \in IIC$



$\beta \in IIIC$



$\phi \in IVC$

θ y β : son positivos.
α y ϕ : son negativos.

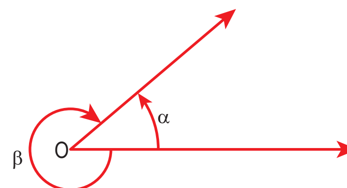
Importante

Si un ángulo está en posición normal entonces el lado final determina el cuadrante de dicho ángulo.



ÁNGULOS COTERMINALES

Los ángulos coterminales son aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo vértice, lado inicial y lado final, pero medidas diferentes.



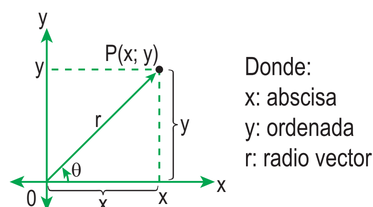
En la figura α y β son ángulos coterminales, y por tanto cumplen las siguientes propiedades:

a) α y β se diferencian en un número entero de vueltas. $\alpha - \beta = k(360°)$; $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

b) Las razones trigonométricas de α y β son iguales. $RT(\alpha) = RT(\beta)$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal se define en base a los lados del triángulo rectángulo, formado por las coordenadas cartesianas (x; y) y el radio vector.

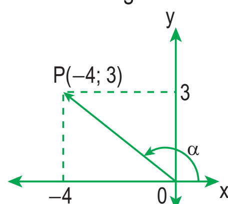


Donde:
x: abscisa
y: ordenada
r: radio vector

Las razones trigonométricas son:

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Ejemplo:
Calcula las razones trigonométricas de α.



Resolución:
Siendo α un ángulo en posición normal, calculamos el valor del radio vector.

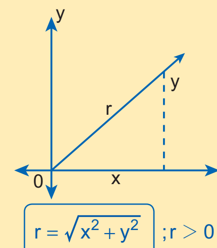
$$r = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Luego, las razones trigonométricas de α son:

$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4}$$
$$\csc\alpha = \frac{r}{y} = \frac{5}{3} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{5}{-4} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{-4}{3}$$

Recuerda

El radio vector es la distancia de un punto del plano cartesiano al origen de coordenadas.



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $r > 0$



SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Los signos de las razones trigonométricas dependen de los valores que tomen la ordenada y la abscisa del punto, ya que estos valores pueden ser positivos o negativos.

1.er cuadrante	2.do cuadrante
$x > 0$; $y > 0$	$x < 0$; $y > 0$
senα (+) cotα (+) cosα (+) secα (+) tanα (+) cscα (+)	senα (+) cotα (–) cosα (–) secα (–) tanα (–) cscα (+)
3.er cuadrante	**4.to cuadrante**
$x < 0$; $y < 0$	$x > 0$; $y < 0$
senα (–) cotα (+) cosα (–) secα (–) tanα (+) cscα (–)	senα (–) cotα (–) cosα (+) secα (+) tanα (–) cscα (–)

Nota

- Las razones trigonométricas de dos o más ángulos coterminales son respectivamente iguales.

Ejemplo:
Sabiendo que $\alpha \in$ IIC y $\beta \in$ IIIC, calcula el signo de:
$M = \text{sen}^3\alpha \cos^2\beta$

Resolución:
Del enunciado sabemos:
$\alpha \in \text{IIC} \Rightarrow \text{sen}\alpha > 0$
$\beta \in \text{IIIC} \Rightarrow \cos\beta < 0$
Luego:
$M = \text{sen}^3\alpha\cos^2\beta = (+)^3(-)^2 = (+)(+) = (+)$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

Las razones trigonométricas de los ángulos 0°; 90°; 180°; 270° y 360°, se detallan en el siguiente cuadro:

Ten en cuenta

Que un ángulo negativo se forma cuando la rotación se efectúa en sentido horario.



RT \ m∢	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0
cot	ND	0	ND	0	ND
sec	1	ND	–1	ND	1
csc	ND	1	ND	–1	ND

ND: No definido

Ejemplo:
Calcula:

$$E = \frac{2\text{sen}\frac{\pi}{2} - \cos\pi}{\cot\frac{3\pi}{2} + \sec 2\pi}$$

Resolución:
Ya que los ángulos están dados en radianes, hacemos la conversión correspondiente:

$$\frac{\pi}{2} = 90° \quad ; \quad \pi = 180° \quad ; \quad \frac{3\pi}{2} = 270° \quad ; \quad 2\pi = 360°$$

Reemplazamos estos valores y obtenemos:

$$E = \frac{2\text{sen}90° - \cos 180°}{\cot 270° + \sec 360°} = \frac{2(1) - (-1)}{0 + 1} = \frac{2 + 1}{1} = 3$$

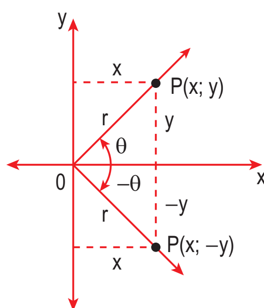
Observación

Las razones trigonométricas de ángulos negativos son negativas excepto el coseno y la secante, que son positivos.



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NEGATIVOS

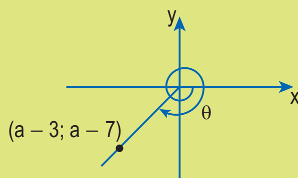
Dado el punto P(x; –y) en el plano cartesiano y el ángulo en posición normal –θ, un ángulo negativo; observando el gráfico sus razones trigonométricas serán:



$\text{sen}(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\text{sen}\theta$
$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\tan\theta$
$\cot(-\theta) = \frac{x}{-y} = -\cot\theta$
$\sec(-\theta) = \frac{r}{x} = \sec\theta$
$\csc(-\theta) = \frac{r}{-y} = -\csc\theta$

EFECTUAR

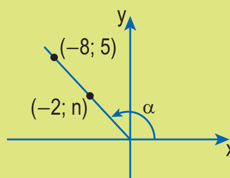
1. Si $\tan\theta = 5$, calcula a.



2. ¿Qué signo tiene la expresión?

$$E = \frac{\text{sen}^3 260° \cdot \cot 115° \cdot \cos^3 116°}{\csc 195° \cdot \tan 336°}$$

3. Del gráfico mostrado, calcula n.



4. ¿Qué signo tiene la expresión?

$$E = \frac{\csc 210°}{\text{sen}195° \cdot \tan 120°}$$

5. Si $\sec\alpha = -3 \wedge \alpha \in$ IIIC. Calcula el valor de:

$$E = \sqrt{2}\,(\csc\alpha - \cot\alpha)$$

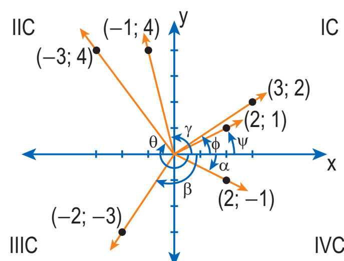
Problemas resueltos

1 Determina a que cuadrante pertenece cada ángulo, tomando como referencia el siguiente cuadro: ángulo – punto del lado final.

Ángulo	Punto
α	(2; –1)
β	(–2; –3)
θ	(–3; 4)
γ	(–1; 4)
ϕ	(3; 2)
ψ	(2; 1)

Resolución:

Ubicamos los puntos en el plano cartesiano, eso nos ayudará a determinar el cuadrante al que pertenece cada ángulo.



Observando el gráfico, obtenemos:

$\alpha \in$ IVC | $\gamma \in$ IIC
$\beta \in$ IIIC | $\phi \in$ IC
$\theta \in$ IIC | $\psi \in$ IC

2 Señala el signo de:

$$K = \frac{\cos 220°\,\text{sen}340° + \text{sen}380°\tan 560°}{\text{sen}75°\tan 470°}$$

Resolución:

Analizamos cada razón por separado:

220° ∈ IIIC $\Rightarrow$ cos220° (–)
340° ∈ IVC $\Rightarrow$ sen340° (–)
380° ∈ IC $\Rightarrow$ sen380° (+)
560° ∈ IIIC $\Rightarrow$ tan560° (+)
75° ∈ IC $\Rightarrow$ sen75° (+)
470° ∈ IIC $\Rightarrow$ tan470° (–)

Reemplazamos cada signo en la expresión:

$$K = \frac{(-)(-) + (+)(+)}{(+)(-)}$$

$$K = \frac{(+) + (+)}{(-)} = \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

$\therefore$ k es negativo

3 Halla el valor numérico de la siguiente expresión:

$$M = \frac{3\sec 180° + 2\csc 90° - 5\tan 180°}{2\cos 0° + \sec 360° - 3\sec 270°}$$

Resolución:

Notamos que los ángulos son cuadrantales, entonces:

$\sec180° = -1 \Rightarrow 3\sec180° = -3$
$\csc90° = 1 \Rightarrow 2\csc90° = 2$
$\tan180° = 0 \Rightarrow -5\tan180° = 0$
$\cos0° = 1 \Rightarrow 2\cos0° = 2$
$\sec360° = 1 \Rightarrow \quad \sec360° = 1$
$\csc270° = -1 \Rightarrow -3\csc270° = 3$

Reemplazamos en M:

$$M = \frac{-3 + 2 - 0}{2 + 1 + 3} = \frac{-1}{6}$$

$\therefore$ M = – 1/6

4 Si cosβ =–4/5; β ∈ IIC. Halla el valor de:

$$P = \frac{1 - \text{sen}^2\beta}{\tan^2\beta + 1}$$

Resolución:

Sabemos:

$$\cos\beta = \frac{x}{r} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \begin{matrix} x = -4 \\ r = 5 \end{matrix}$$

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow (-4)^2 + y^2 = 5^2$
$y^2 = 25 - 16$
$y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$

Como β ∈ IIC; entonces "y" toma un valor positivo:

$\Rightarrow y = +3$

En la expresión:

$$\text{sen}\beta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{sen}^2\beta = 9/25$$

$\tan\beta = y/x = 3/-4 \Rightarrow \tan^2\beta = 9/16$

Reemplazamos en P:

$$P = \frac{1 - \text{sen}^2\beta}{\tan^2\beta + 1} = \frac{1 - 9/25}{9/16 + 1} = \frac{\frac{16}{25}}{\frac{25}{16}}$$

$$\therefore P = \frac{256}{625}$$

5 Se tienen dos ángulos coterminales; tal que la relación en que están es de 5 a 2. Halla el valor de cada uno, si el mayor de los ángulos pertenece el intervalo ⟨500°; 1000°⟩

Resolución:

Sean los ángulos α y β, donde α < β.

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = 5k \\ \alpha = 2k \end{matrix}$$

Sabemos por ángulos coterminales:

$\beta - \alpha = 360°n;\ n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$5k - 2k = 360°n \Rightarrow 3k = 360°n$

$k = 120°n$

- Si:

$n = 1 \Rightarrow k = 120 \Rightarrow \beta = 600° \wedge \alpha = 240°$

$n = 2 \Rightarrow k = 240 \Rightarrow \beta = 1200° \wedge \alpha = 480°$

$n = 3 \Rightarrow k = 360° \Rightarrow \beta = 1800° \wedge \alpha = 720°$

$\therefore \beta = 600° \wedge \alpha = 240°$

6 Si: $F(x) = \dfrac{\text{sen}x + \cos 2x - \cot 3x}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \cos 4x - \cos 2x}$

Halla el valor de F(90°).

Resolución:

Utilizamos el cuadro de ángulos cuadrantales.

$\text{sen}x \Rightarrow \text{sen}90° = 1$

$\cos 2x \Rightarrow \cos 180° = -1$

$\cot 3x \Rightarrow \cot 270° = 0$

$\tan(x/2) \Rightarrow \tan 45° = 1$

$\cos 4x \Rightarrow \cos 360° = 1$

$\cos 2x \Rightarrow \cos 180° = -1$

Reemplazamos en la expresión:

$$F(90°) = \frac{\text{sen}90° + \cos 180° - \cot 270°}{\tan 45° + \cos 360° - \cos 180°}$$

$$F(90°) = \frac{1 + (-1) - (0)}{1 + 1 - (-1)} = \frac{0}{3} = 0$$

$\therefore F(90°) = 0$

7 Sabiendo que $\csc\theta = -2,\widehat{3}$ y $\cot\theta > 0$.
Calcula: $E = 3\cot\theta - 7\cos\theta$

Resolución:

$$\csc\theta = -2,\widehat{3} = -(2 + 0,\widehat{3}) = -\left(2 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

$$\csc\theta = -\frac{7}{3} = \frac{7}{-3} = \frac{r}{y}$$

Se elige: $r = 7 \wedge y = -3$

$r^2 = x^2 + y^2$

$7^2 = x^2 + (-3)^2$

$x^2 = 40$

$x = \pm 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow x = -2\sqrt{10}$; $(\csc\theta < 0 \wedge \cot\theta > 0)$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-2\sqrt{10}}{-3} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

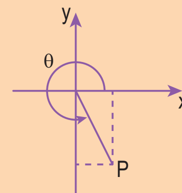
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2\sqrt{10}}{7} = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

Reemplazamos:

$$E = 3\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right) - 7\left(-\frac{2\sqrt{10}}{7}\right) = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

$\therefore E = 4\sqrt{10}$

8 Determina el valor de: $\sqrt{5}(\cos\theta - 2\csc\theta)$
Si p(3; –6).



Resolución:

$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$; $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$; r(radio vector)

$\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 = (3)^2 + (-6)^2 = 45$

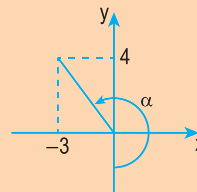
$r = 3\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{-6} = \frac{-\sqrt{5}}{2} \; ; \; \cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

En lo que piden:

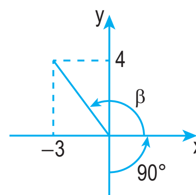
$$\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = 1 + 5 = 6$$

9 Determina $M = \cos\alpha - \tan\alpha$



Resolución:

Observamos que α no es un ángulo en posición estandar:



$\Rightarrow$ Tenemos un ángulo en posición estandar $= \beta$
Donde: $\alpha = 90° + \beta$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos(90° + b)$

$\tan\alpha = \tan(90° + b)$

En M:

$M = \cos\alpha - \tan\alpha$

$$M = \underbrace{\cos(90° + \beta)}_{-\text{sen}\,\beta} - \underbrace{\tan(90° + \beta)}_{(-\cot\beta)}$$

De la figura, para β: x=–3; y = 4; r = 5

$$\Rightarrow M = \underbrace{\cot\beta}_{\frac{-3}{4}} - \underbrace{\text{sen}\,\beta}_{\frac{4}{5}}$$

$\therefore M = -\dfrac{31}{20}$

ÁNGULOS VERTICALES

T

CONCEPTOS PRELIMINARES

Línea vertical: es la línea que coincide con la dirección que marca la plomada.
Línea horizontal: es toda aquella línea perpendicular a la vertical.
Plano vertical: es aquel que contiene a toda línea vertical.
Línea visual: llamada también línea de mira, es aquella línea recta imaginaria que une el ojo del observador con el objeto observado.

Observación

- Tanto las líneas visuales como las líneas horizontales son líneas imaginarias.
- La línea horizontal siempre es paralela al suelo y se extiende al infinito.



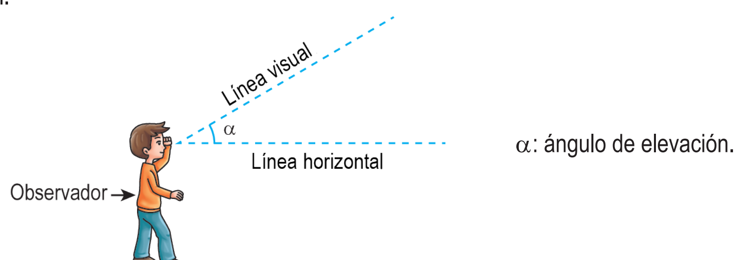
ÁNGULOS VERTICALES

Definición

Son aquellos ángulos contenidos en un plano vertical formados por la línea visual o de mira y la línea vertical que parten de la vista del observador. Los ángulos verticales pueden ser:

Ángulo de elevación

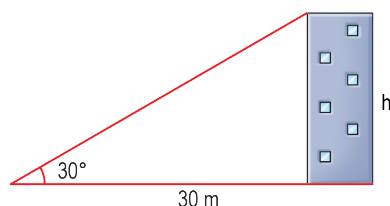
Es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objeto se encuentra por encima de la línea horizontal.



α: ángulo de elevación.

Ejemplo:
Desde un punto en tierra ubicada a 30 m de un edificio, se observa su parte más alta con un ángulo de elevación de 30°. ¿Cuál es la altura del edificio?

Resolución:
Sea "h" la altura del edificio.



Del gráfico: $\tan 30° = \dfrac{h}{30}$

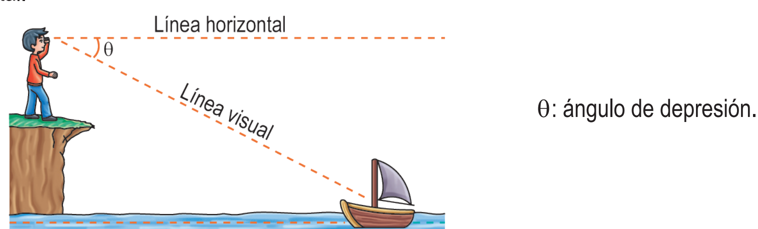
$h = 30\tan 30°$

$h = 30\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$h = 10\sqrt{3}$ m

Ángulo de depresión

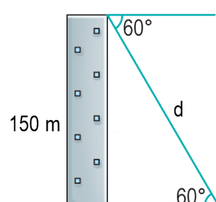
Es aquel ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objeto se encuentra por debajo de la línea horizontal.



θ: ángulo de depresión.

Ejemplo:
Desde la parte más alta de un edificio se observa una cucaracha en el suelo con un ángulo de depresión de 60°. Si la altura del edificio es de 150 m, calcula la longitud de la visual.

Resolución:
Sea "d" la longitud de la visual.



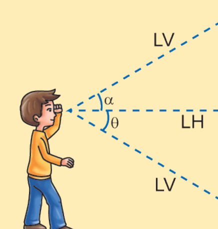
Del gráfico: $\csc 60° = \dfrac{d}{150}$

$d = 150\csc 60°$

$d = 150\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$d = 100\sqrt{3}$

Recuerda



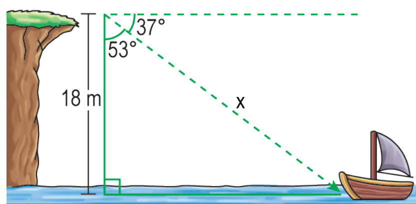
α: ángulo de elevación.
θ: ángulo de depresión.
LV: línea visual.
LH: línea horizontal.



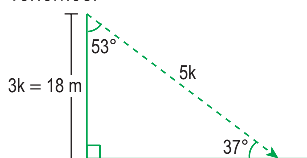
Problemas resueltos

1 Desde lo alto de un acantilado se observa un bote con ángulo de depresión de 37°. Calcula la longitud de la visual, si la altura del acantilado es 18 m.

Resolución:



Tenemos:



$3k = 18$

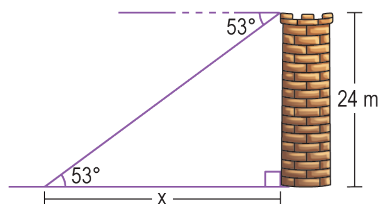
$k = 6$

$\Rightarrow 5k = 5(6) = 30$

$\therefore$ La visual mide 30 m.

2 Desde lo alto de una torre de 24 m de altura se observa un objeto en el suelo con un ángulo de depresión de 53°. ¿A qué distancia de la base de la torre se encuentra el objeto?

Resolución:



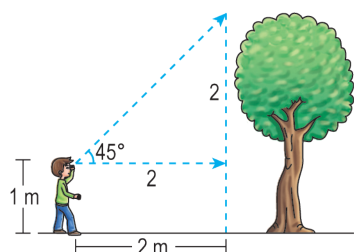
Del gráfico:

$\frac{x}{24} = \cot 53°$

$x = 24\cot 53° = 24\left(\frac{3}{4}\right)$ $\therefore x = 18$ m

3 Un niño de 1 m observa lo alto de un árbol con ángulo de elevación de 45°. Calcula la altura del árbol, si la distancia que separa al niño y al árbol es 2 m.

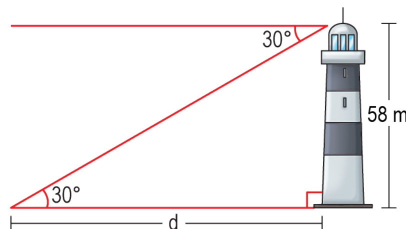
Resolución:



$H_{árbol} = H_{niño} + 2 = 1 + 2 = 3$ m

4 Desde lo alto de un faro de 58 m sobre el nivel del mar se observa un buque con un ángulo de depresión de 30°. Halla la distancia a la que está el buque de la base del faro.

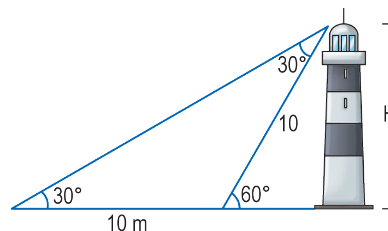
Resolución:



$d = 58\cot 30° = 58\sqrt{3} = 58(1,73) = 100,34$ m

5 Un nadador se dirige hacia un faro y observa la parte más alta del mismo con un ángulo de elevación de 30°, al avanzar 10 m el ángulo de elevación es ahora el doble del anterior. Encuentra la altura del faro.

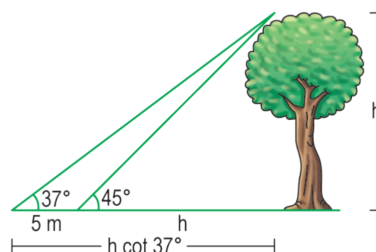
Resolución:



$H = 10\operatorname{sen}60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

6 Desde un punto en el suelo se ubica la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación de 37°. Si nos acercamos 5 m el nuevo ángulo de elevación es de 45°. Calcula la altura del árbol.

Resolución:

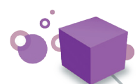


Del gráfico: $5 + h = h\cot 37°$

$5 + h = \frac{4}{3}h$

$5 = \frac{h}{3}$

$\therefore h = 15$ m



UNIDAD 4

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

DEFINICIÓN

Se denomina así a la comparación entre los valores de las razones trigonométricas de un ángulo de cualquier medida con respecto a otro cuyo ángulo es agudo.

CASOS

Se presentan los siguientes casos:

1.er caso

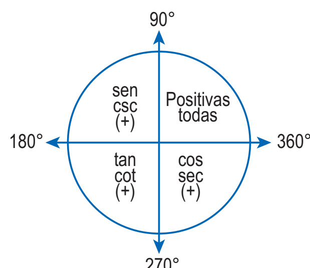
Para ángulos menores que una vuelta.
Es el procedimiento mediante el cual se determinan las razones trigonométricas de un ángulo que no es agudo, en función de otro que sí lo es.

Regla práctica:

$$RT(180° \pm \theta) = \pm RT(\theta)$$
$$RT(360° - \theta) = \pm RT(\theta)$$

$$RT(90 + \theta) = \pm CO\text{-}RT(\theta)$$
$$RT(270 \pm \theta) = \pm CO\text{-}RT(\theta)$$

El signo dependerá de la posición del ángulo a reducir y de la razón trigonométrica que lo afecta, teniendo en cuenta:



Ejemplos:
Reduce al primer cuadrante:

1. $\text{sen}300° = \text{sen}(360° - 60°)$
$= -\text{sen}60°$
$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\tan 233° = \tan(270° - 37°)$
$= \cot 37°$
$= \dfrac{4}{3}$

3. $\sec 135° = \sec(90° + 45°)$
$= -\csc 45°$
$= -\sqrt{2}$

4. $\csc 150° = \csc(180° - 30°)$
$= \csc 30°$
$= 2$

2.° caso:

Para ángulos mayores que una vuelta.

Regla práctica:

$$RT(360n + \theta) = RT(\theta)$$

Ejemplos:
Reduce al primer cuadrante:

1. sen750°

$750° \,|\, 360°$; $720°$; 2 ; $30°$ $\Rightarrow \text{sen}750° = \text{sen}30°$

$\therefore \text{sen}750° = \dfrac{1}{2}$

2. tan1133°

$1133° \,|\, 360°$; $1080°$; 3 ; $53°$ $\Rightarrow \tan 1133° = \tan 53°$

$\therefore \tan 1133° = \dfrac{4}{3}$

Observación

El signo solo depende de la RT Inicial, es decir, del cuadrante al que pertenece el ángulo antes de reducir.
Ejemplo:
$\text{sen}210° = \text{sen}(180° + 30°)$
$= -\text{sen}30°$
→ pues 210° ∈ IIIC y allí el seno es negativo.



Recuerda

Se divide el ángulo a reducir entre 360°, donde la RT de dicho ángulo será igual a la RT del residuo obtenido en la división.
Sea $\theta > 360°$
$\theta \,|\, 360°$
$\alpha \quad n$

$RT(\theta) = RT(\alpha)$

Ejemplo:
csc4365°
$4365° \,|\, 360°$
$45° \quad 12$

$\Rightarrow \csc 4365° = \csc 45°$
$\therefore \csc 4365° = \sqrt{2}$



3. cos1845°

$$\begin{array}{r|l} 1845° & 360° \\ \underline{1800°} & 5 \\ 45° & \end{array} \Rightarrow \cos1845° = \cos45°$$

$\therefore \cos1845° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. cot1500°

$$\begin{array}{r|l} 1500° & 360° \\ \underline{1440°} & 4 \\ 60° & \end{array} \Rightarrow \cot1500° = \cot60°$$

$\therefore \cot1500° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3.er caso

Para ángulos negativos.

Regla práctica:

$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

Importante

Se observa que el coseno y la cosecante son las únicas razones trigonométricas donde el signo se puede absorber; para las demás razones trigonométricas, el signo se coloca delante de la razón trigonométrica.



Ejemplos:
Halla el valor de las siguientes razones trigonométricas:

1. $\csc(-53°) = -\csc53°$
$= -\dfrac{5}{4}$

2. $\cot(-60°) = -\cot60°$
$= -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. $\cos(-330°) = \cos330°$
$= \cos(360° - 30°)$
$= \cos30°$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\sec(-315°) = \csc315°$
$= \csc(270° + 45°)$
$= \csc45°$
$= \sqrt{2}$

Problemas de aplicación:

1. Simplifica:

$$M = \frac{\tan x + \tan(180° - x)}{\tan(360° - x)}$$

Resolución:

$$M = \frac{\tan x + \tan x}{-\tan x}$$

$$M = \frac{2\tan x}{-\tan x}$$

$\therefore M = -2$

2. Si $\tan40° = m$, halla $P = \tan220°$

Resolución:

$P = \tan220°$
$= \tan(180° + 40°)$
$= \tan40°$
$\therefore \tan220° = m$

3. Si $\tan\theta = 3$; θ: agudo, halla:

$$N = \frac{\text{sen}(360° - \theta)}{\cos(180° + \theta)}$$

Resolución:

$$N = \frac{-\text{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$N = -\tan\theta$

$\therefore N = -3$

4. Halla $\text{sen}\theta$, θ: agudo.

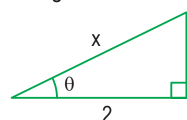
Si $\tan\theta = \dfrac{\cos(360° - x) + \cos x}{4\cos x}$

Resolución:

$$\tan\theta = \frac{\cos x + \cos x}{4\cos x}$$

$$\tan\theta = \frac{2\cos x}{4\cos x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$$

θ: agudo



$x^2 = 1^2 + 2^2$
$x^2 = 1 + 4$
$x^2 = 5$
$x = \sqrt{5}$

$\therefore \text{sen}\theta = \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

5. Halla x en:
$x\,\text{sen}1110° = \cos2010°$

Resolución:

$$x = \frac{\cos2010°}{\text{sen}1110°}$$

$$= \frac{\cos(360° \times 5 + 210°)}{\text{sen}(360° \times 3 + 30°)}$$

$$= \frac{\cos210°}{\text{sen}30} = \frac{\cos(180° + 30°)}{\text{sen}30°}$$

$$= \frac{-\cos30°}{\text{sen}30°} \Rightarrow x = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$\therefore x = -\sqrt{3}$

Problemas resueltos

1 Calcula:
$E = \sec 240° - \cot 315° + \csc 150°$

Resolución:

$E = \sec(180° + 60°) - \cot(270° + 45°) + \csc(90° + 60°)$

$E = -\sec 60° + \tan 45° + \sec 60° = \tan 45°$

$E = 1$

2 Calcula:
$E = (\tan 150°)(\text{sen}315°)$

Resolución:

$E = (\tan(90° + 60°)(\text{sen}(270° + 45°))$

$E = (-\cot 60°)(-\cos 45°)$

$E = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$E = \frac{\sqrt{6}}{6}$

3 Halla:
$E = \text{sen}(-30°) + \tan(-53°)$

Resolución:

$E = -\text{sen}30° - \tan 53°$

$E = -\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{3}\right)$

$E = \frac{-11}{6}$

4 Determina el valor de:
$M = \cos 1200° + \tan 1485°$

Resolución:

$M = \cos(360° \times 3 + 120°) + \tan(360° \times 4 + 45°)$

$M = \cos 120° + \tan 45°$

$M = \cos(90° + 30°) + 1$

$M = -\text{sen}30° + 1$

$M = -\frac{1}{2} + 1$

$M = \frac{1}{2}$

5 Calcula:
$M = \tan 1200° + \text{sen}1800°$

Resolución:

$M = \tan 1200° + \text{sen}1800°$

$M = \tan(3 \times 360° + 120°) + \text{sen}(360° \times 5)$

$M = \tan 120° + \underbrace{\text{sen}0°}_{0}$

$M = \tan(180° - 60°)$

$M = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

6 Calcula:
$K = \frac{\csc(270° - x) - \text{sen}(90° + y)}{\cot(360° - x)}$

Resolución:

$K = \frac{-\sec x - \cos y}{-\cot x}$

$\therefore K = \frac{\sec x + \cos y}{\cot x}$

7 Calcula el valor de:
$P = \frac{\text{sen}(90° + y) - \text{sen}(180° - x)}{\csc(270° - y) + \cot(360° - x)}$

Resolución:

$P = \frac{\cos y - \text{sen}x}{-\sec y + (-\cot x)}$

$P = \frac{\cos y - \text{sen}x}{-\sec y - \cot x}$

$P = \frac{\text{sen}x - \cos y}{\sec y + \cot x}$

8 Reduce:
$R = \frac{\text{sen}200° + 2\cos 1510°}{\cos(-70°)}$

Resolución:

$R = \frac{\text{sen}(180° + 20°) + 2\cos(360° \times 4 + 70°)}{\cos 70°}$

$R = \frac{-\text{sen}20° + 2\cos 70°}{\cos 70°}$

$R = \frac{-\text{sen}(90° - 70°) + 2\cos 70°}{\cos 70°}$

$R = \frac{-\cos 70° + 2\cos 70°}{\cos 70°} = \frac{\cos 70°}{\cos 70°}$

$R = 1$

9 Simplifica:
$E = \frac{\text{sen}(-20°)}{\text{sen}200°} + \frac{\cos(-30°)}{\cos 300°} + \frac{\tan(-40°)}{\tan 400°}$

Resolución:

$E = \frac{-\text{sen}20°}{\text{sen}(180°+20°)} + \frac{\cos 30°}{\cos(360°-60°)} + \frac{-\tan(40°)}{\tan(360°+40°)}$

$E = \frac{-\text{sen}20°}{-\text{sen}20°} + \frac{\cos 30°}{\cos 60°} + \frac{-\tan 40°}{\tan 40°}$

$E = 1 + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} + (-1)$

$E = 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow E = \sqrt{3}$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINICIÓN

Son aquellas igualdades entre razones trigonométricas de una variable, las cuales se verifican para todo valor de la variable en que la razón trigonométrica que interviene se encuentre definida.

CLASIFICACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

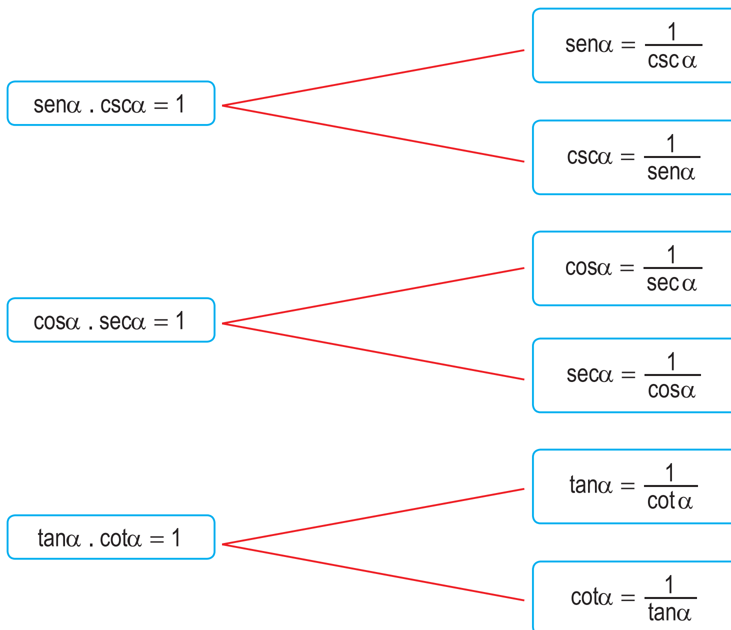
Las identidades trigonométricas se clasifican en tres grupos: identidades recíprocas, pitagóricas y por cociente.

Importante

Las demostraciones de las identidades se realizan de manera sencilla, tomando como referencia cualquier ángulo en posición normal.



a) Identidades recíprocas



Atención

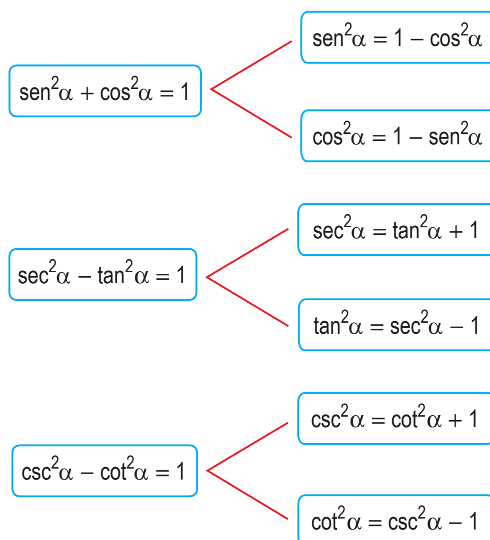
Para realizar algún tipo de demostración siempre se debe empezar a trabajar alguno de los miembros de la igualdad, no los dos miembros al mismo tiempo.



b) Identidades por cociente

$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

c) Identidades pitagóricas



Ejemplos:
Observa los siguientes ejemplos en que aplicamos las identidades trigonométricas.

1. Simplifica:

$$E = \frac{\text{sen}\alpha\tan\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha\cot\alpha + \text{sen}\alpha}$$

Resolución:

$$E = \frac{\text{sen}\alpha\left(\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) + \cos\alpha}{\cos\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right) + \text{sen}\alpha}$$ En esta parte utilizamos las identidades por cociente

$$E = \frac{\frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\alpha}} = \frac{\text{sen}\alpha\,(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos\alpha\,(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)}$$

$$E = \frac{\text{sen}\alpha\,(1)}{\cos\alpha\,(1)}$$ Aquí utilizamos la primera identidad pitagórica

$$E = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$ Por último, utilizamos una identidad por cociente

2. Reduce:

$$C = \sqrt{\frac{\sec^2\alpha\csc^2\alpha - \csc^2\alpha}{\sec^2\alpha\csc^2\alpha - \sec^2\alpha}}$$

Resolución:
Observando C, factorizamos $\csc^2\alpha$ y $\sec^2\alpha$

$$C = \sqrt{\frac{\csc^2\alpha(\sec^2\alpha - 1)}{\sec^2\alpha(\csc^2\alpha - 1)}}$$ Utilizamos: $\tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1$; $\text{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha - 1$

$$C = \sqrt{\frac{\csc^2\alpha(\tan^2\alpha)}{\sec^2\alpha(\cot^2\alpha)}}$$ Utilizamos las identidades recíprocas

$$C = \sqrt{\frac{\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} \cdot \frac{\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}}}$$

$$C = \sqrt{\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\tan^2\alpha}$$

$$C = \tan\alpha$$

3. Simplifica:
$P = (1 + \text{sen}x)^2 + (1 - \text{sen}x)^2 + 2\cos^2x$

Resolución:
$P = (1 + 2\text{sen}x + \text{sen}^2x) + (1 - 2\text{sen}x + \text{sen}^2x) + 2\cos^2x$
$P = 2 + 2\text{sen}^2x + 2\cos^2x$
$P = 2 + 2\underbrace{(\text{sen}^2x + \cos^2x)}_{1}$
$P = 2 + 2$
$P = 4$

4. Reduce:
$R = (1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2 - 2\sec^2x$

Resolución
$R = (1 + 2\tan x + \tan^2x) + (1 - 2\tan x + \tan^2x) - 2\sec^2x$
$R = 2 + 2\tan^2x - 2\sec^2x$
$R = 2 + 2\tan^2x - 2(\tan^2x + 1)$
$R = 2 + 2\tan^2x - 2\tan^2x - 2$
$R = 0$

5. Halla el valor de:

$$S = \frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$$

Resolución:
Aplicamos identidades por cociente:

$$S = \frac{1 + \frac{\text{sen}x}{\cos x}}{1 + \frac{\cos x}{\text{sen}x}}$$

$$S = \frac{\frac{\cos x + \text{sen}x}{\cos x}}{\frac{\text{sen}x + \cos x}{\text{sen}x}}$$

$$S = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

$S = \tan x$

Ten en cuenta
Las identidades recíprocas, pitagóricas y por división, también son llamadas identidades fundamentales.



Observación
No hay una regla definida para la resolución de problemas, pero muchas veces conviene transformar toda la expresión en función a senos y cosenos.



Recuerda
Las identidades auxiliares también podemos demostrarlas usando las identidades fundamentales.



IDENTIDADES AUXILIARES

Estas identidades trigonométricas también son muy utilizadas para la resolución de problemas sobre identidades. Para las demostraciones de cada una de ellas se utilizan las identidades fundamentales.

$$\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

$$\text{sen}^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

$$\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$$

$$\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$$

Problemas resueltos

1 Si $\text{sen}^2\alpha + \csc^2\alpha = 11$. Halla el valor de: $k = \csc\alpha - \text{sen}\alpha$

Resolución:

Elevamos k al cuadrado:

$k^2 = (\csc\alpha - \text{sen}\alpha)^2 = \csc^2\alpha - \underbrace{2\csc\alpha \,.\, \text{sen}\alpha}_{\text{recíprocas}} + \text{sen}^2\alpha$

$k^2 = \underbrace{\text{sen}\alpha^2 + \csc^2\alpha}_{} - 2(1)$

$k^2 = \quad 11 - 2 = 9 \Rightarrow k^2 = 9$

$\therefore\ k = 3$

2 Si: $(\text{sen}x + 3\cos x)^2 + (3\text{sen}x - \cos x)^2 = m\text{sen}^2x + n\cos^2x$
Halla el valor de $m + n$.

Resolución:

Operamos la expresión:

$(\text{sen}x + 3\cos x)^2 + (3\text{sen}x - \cos x)^2 = m\text{sen}^2x + n\cos^2x$

$\text{sen}^2x + 2(3\cos x)(\text{sen}x) + 9\cos^2x + 9\text{sen}^2x - 2(3\text{sen}x)(\cos x) + \cos^2x = m\text{sen}^2x + n\cos^2x$

$10\text{sen}^2x + 6\text{sen}x.\cos x + 10\cos^2x - 6\text{sen}x\cos x = m\text{sen}^2x + n\cos^2x$

$10\text{sen}^2x + 10\cos^2x = m\text{sen}^2x + n\cos^2x$

$\Rightarrow\ m = 10 \wedge n = 10$

$\therefore\ m + n = 10 + 10 = 20$

3 Halla el valor de:

$$A = \frac{\text{sen}^3a + \text{sen}a.\cos^2a}{\text{sen}a}$$

Resolución:

Factorizamos:

$$A = \frac{\cancel{\text{sen}a}(\text{sen}^2a + \cos^2a)}{\cancel{\text{sen}a}}$$

$A = \text{sen}^2a + \cos^2a$ (identidad pitagórica)

$A = 1$

4 Simplifica la siguiente expresión:
$S = \tan x(1 + \cos x) - \text{sen}^2x \,.\, \csc x$

Resolución:

En la expresión, tenemos:

$S = \tan x(1 + \cos x) - \text{sen}x(\overbrace{\cancel{\text{sen}x \,.\, \csc x}}^{1})$

Recordemos que:

$\text{sen}x \,.\, \csc x = 1$ (Identidad recíproca)

$S = \tan x + \tan x.\cos x - \text{sen}x$

$S = \tan x + \frac{\text{sen}x}{\cancel{\cos x}}.\cancel{\cos x} - \text{sen}x$

$S = \tan x + \cancel{\text{sen}x} - \cancel{\text{sen}x}$

$\Rightarrow\ S = \tan x$

5 Factoriza el siguiente enunciado:

$$B = \frac{\cos^2x - \cos^4x}{\text{sen}^2x - \text{sen}^4x}$$

Resolución:

Factorizamos el término común:

$$B = \frac{\cos^2x\overbrace{(1 - \cos^2x)}^{\text{identidad}}}{\text{sen}^2x\underbrace{(1 - \text{sen}^2x)}_{\text{identidad}}} = \frac{\cos^2x \,.\, \text{sen}^2x}{\text{sen}^2x \,.\, \cos^2x}$$

$\therefore\ B = 1 \times 1 = 1$

6 Si: $\text{sen}^4x + \cos^4x = A + B\,\text{sen}^2x\cos^2x$
calcula: $3A - B$

Resolución:

Sabemos que: $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$

Al cuadrado: $(\text{sen}^2x + \cos^2x)^2 = 1^2$

$\text{sen}^4x + 2\text{sen}^2x \,.\, \cos^2x + \cos^4x = 1$

$\underbrace{\text{sen}^4x + \cos^4x}_{} = 1 - 2\text{sen}^2x \,.\, \cos^2x$

$A + B\text{sen}^2x \,.\, \cos^2x = 1 - 2\text{sen}^2x \,.\, \cos^2x$

Comparando:

$A = 1$

$B = -2$ $\quad\Rightarrow\ 3A - B = 3(1) - (-2) = 3 + 2$

$\therefore 3A - B = 5$

7 Halla el valor de m para que la siguiente expresión sea una identidad.
$(\text{sen}x + \sec x)^2 + 1 + \cos^2x = 2 + (1 + \tan x)^m$

Resolución:

$\text{sen}^2x + \sec^2x + 2\text{sen}x\sec x + 1 + \cos^2x = 2 + (1 + \tan x)^m$

(sen^2x y $\cos^2x$ → 1)

$1 + \sec^2x + 2\text{sen}x \,.\, \sec x + 1 = 2 + (1 + \tan x)^m$

$2 + \sec^2x + 2\text{sen}x \,.\, \sec x = 2 + (1 + \tan x)^m$

$2 + \underbrace{1 + \tan^2x + 2\tan x}_{(1 + \tan x)^2} = 2 + (1 + \tan x)^m$

$\therefore m = 2$

8 Halla x en:
$x(\cos\theta - \sec\theta) = \tan\theta$

Resolución:

Aplicando las identidades recíprocas y de cociente se tiene:

$$x\left(\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$x\left(\frac{\cos^2\theta - 1}{\cos\theta}\right) = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$x(-\text{sen}^2\theta) = \text{sen}\theta$

$x = \dfrac{\text{sen}\theta}{-\text{sen}^2\theta}$ $\qquad \therefore x = -\csc\theta$

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

T

DEFINICIÓN

El sistema métrico decimal es el sistema de medida universalmente aceptado, cuyas unidades están relacionadas mediante potencias de 10.

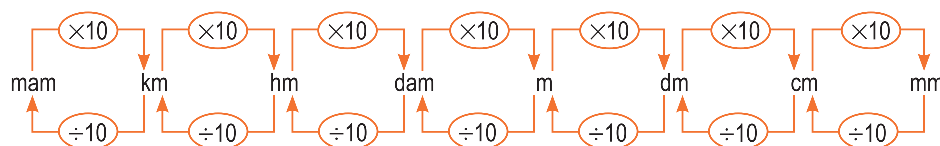
UNIDADES DE LONGITUD

Las medidas de longitud son utilizadas para medir distancias entre dos puntos dados. El metro (m) es la unidad fundamental de la longitud en el sistema internacional de unidades.

Los múltiplos (unidades mayores) y submúltiplos (unidades menores) del metro son:

Múltiplos del metro				Unidad principal	Submúltiplos del metro		
10 000 m miriámetro mam	1000 m kilómetro km	100 m hectómetro hm	10 m decámetro dam	metro m	0,1 m decímetro dm	0,01 m centímetro cm	0,001 m milímetro mm

Para convertir una unidad de longitud en otra se multiplica o se divide por 10^n, donde n es el número de espacios que hay entre la unidad dada y la unidad a convertir. Observa el siguiente cuadro:



Ejemplos:
Convierte 3,2 m a:
(a) centímetro (b) decámetro

Resolución

(a) Centímetro: observando en el cuadro anterior notamos que los centímetros están a la derecha del metro, entonces en este caso debemos multiplicar:
$3,2 \text{ metros} = 3,2 \times 10^2 \text{ cm} = 320 \text{ cm}$

(b) Decámetro: de la tabla, el decámetro se encuentra a la izquierda, en este caso debemos dividir:
$3,2 \text{ metros} = 3,2 \div 10 \text{ dam} = 0,32 \text{ dam}$

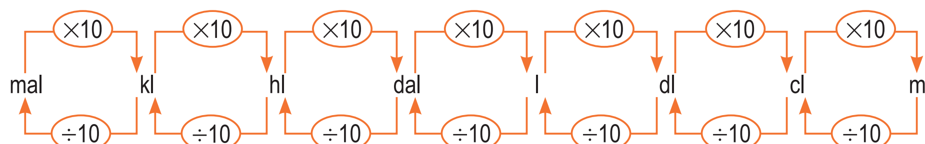
UNIDADES DE CAPACIDAD

Cuando nos referimos a la **capacidad** que contiene un depósito, hacemos mención a la cantidad de líquido que este puede tener. El litro (l) es la unidad principal de capacidad.

Los múltiplos (unidades mayores) y submúltiplos (unidades menores) del litro son:

Múltiplos del litro				Unidad principal	Submúltiplos del litro		
10 000 l mirialitro mal	1000 l kilolitro kl	100 l hectolitro hl	10 l decalitro dal	litro l	0,1 l decilitro dl	0,01 l centilitro cl	0,001 l mililitro ml

Para convertir de una unidad a otra tomaremos en cuenta el siguiente esquema:



Importante

Una magnitud es todo lo que se puede medir. Los ejemplos más comunes de magnitud son: la longitud, la superficie, el volumen, la capacidad, la masa y el tiempo.

Nota

Para multiplicar (dividir) un número por 10; 100; 1000; ... etc., se desplaza la coma a la derecha (izquierda) tantos lugares como ceros tenga la unidad.

Ejemplo:
$0,34 \times 100 = 34$
$0,05 \times 10 = 0,5$

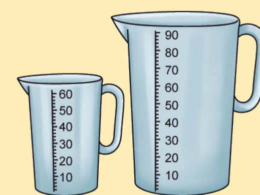
Además, utilizamos el micrómetro (μm) para medir longitudes muy pequeñas:
$1 \ \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$



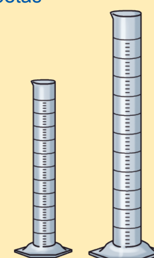
Importante

Estos son algunos instrumentos de medida de capacidad:

Jarras y vasos graduados



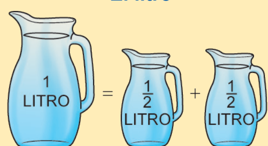
Probetas



Observación

Las siguientes equivalencias también son muy utilizadas:

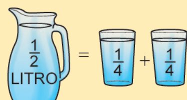
El litro



1 litro = 2 medios litros (también son 4 vasos)



1 litro = 2 medios litros (son 4 vasos)



Medio litro = 2 vasos



Nota

Para medir grandes masas se utilizan las siguientes unidades:

Tonelada métrica 1 t = 1000 kg
Quintal métrico 1 q = 100 kg

Atención

Normalmente utilizamos la palabra peso para referirnos a la masa.



Ejemplo:
Convierte 17,2 l a:
(a) mililitro
(b) hectolitro

Resolución:
(a) **Mililitro**: los mililitros se encuentran a 3 espacios a la derecha del litro, entonces multiplicamos.
17,2 litros = $17{,}2 \times 10^3$ ml = 17 200 ml

(b) **Hectolitro**: los hectolitros se encuentran a 2 espacios a la izquierda del litro, entonces dividimos:
17,2 litros = $17{,}2 \div 10^2$ hl = 0,172 hl

UNIDADES DE MASA

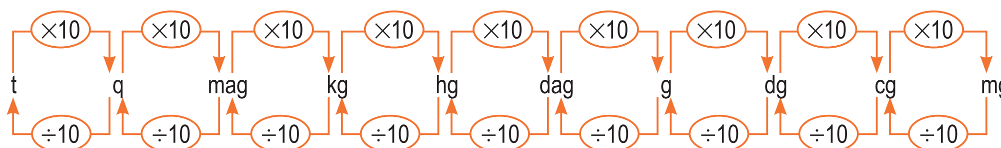
La masa de un cuerpo corresponde a la cantidad de materia que este posee.

El kilogramo (kg) y el gramo (g) son las unidades principales de masa.

Los múltiplos (unidades mayores) y submúltiplos (unidades menores) del gramo son:

Múltiplos del gramo				Unidad principal	Submúltiplos del gramo		
10 000 g miriagramo mag	1000 g kilogramo kg	100 g hectogramo hg	10 g decagramo dag	gramo g	0,1 g decigramo dg	0,01 g centigramo cg	0,001 g miligramo mg

Para pasar de una unidad de masa a otra, debemos multiplicar por 10^n (n es el número de espacios entre la unidad pedida y la dada) si la unidad pedida está hacia la derecha y dividimos si está a la izquierda.
Observe el siguiente cuadro.



Ejemplo:
Convierte 0,7 g a:
(a) centigramo
(b) hectogramo

Resolución:
(a) **Centigramo**: el centigramo se encuentra a 2 espacios a la derecha del gramo; es decir; multiplicamos:
0,7 g = $0{,}7 \times 10^2$ = 70 cg

(b) **Hectogramo**: los hectogramos se encuentran a 2 espacios a la izquierda del gramo, en este caso dividimos:
0,7 g = $0{,}7 \div 10^2$ = 0,007 hg

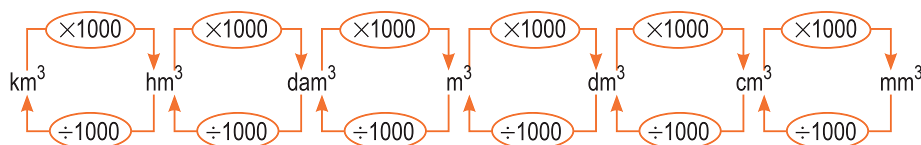
UNIDADES DE VOLUMEN

El volumen es una magnitud definida como el espacio ocupado por un cuerpo. El metro cúbico (m^3) es la unidad principal del volumen en el Sistema Internacional de Unidades.

Los múltiplos y submúltiplos de metro cúbico se detallan en el siguiente cuadro:

Múltiplos del metro cúbico			Unidad principal	Submúltiplos del metro cúbico		
1 000 000 000 m^3 kilómetro cúbico km^3	1 000 000 m^3 hectómetro cúbico hm^3	100 m^3 decámetro cúbico dam^3	metro cúbico m^3	0,001 m^3 decímetro cúbico dm^3	0,000001 m^3 centímetro cúbico cm^3	0,000000001 m^3 milímetro cúbico mm^3

Para convertir de una unidad a otra utilizaremos el siguiente esquema:



Ejemplo:
Convierte 7,1 m^3 a:
(a) Centímetro cúbico
(b) Decámetro cúbico

Resolución:
(a) Centímetro cúbico: sabemos que en el cuadro el centímetro cúbico se encuentra a 2 espacios a la derecha del m^3, en este caso, debemos multiplicar:
$7,1\ m^3 = 7,1 \times 1000^2\ cm^3 = 7,1 \times 10^6\ cm^3 = 7\ 100\ 000\ cm^3$

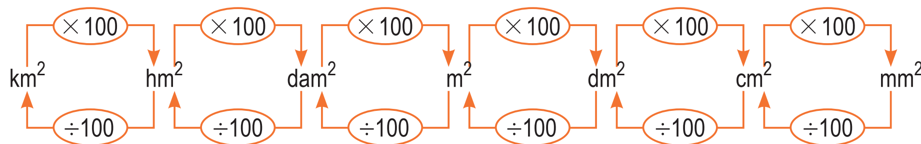
(b) Decámetro cúbico: la unidad pedida se encuentra a la izquierda del m^3, entonces debemos dividir:
$7,1\ m^3 = 7,1 \div 1000\ dam^3 = 0,0071\ dam^3$

UNIDADES DE SUPERFICIE

La superficie es una magnitud que nos permite conocer la extensión de un cuerpo plano, es decir, su área.
La unidad principal de superficie se llama metro cuadrado (m^2). Un metro cuadrado es el área de un cuadrado, cuyo lado mide un metro.
Los múltiplos (unidades mayores) y los submúltiplos (unidades menores) del metro cuadrado son:

Múltiplos del metro cuadrado			Unidad principal	Submúltiplos del metro cuadrado		
1 000 000 m^2 kilómetro cuadrado km^2	1 0 000 m^2 hectómetro cuadrado hm^2	100 m^2 decámetro cuadrado dam^2	metro cuadrado m^2	0,01 m^2 decímetro cuadrado dm^2	0,0001 m^2 centímetro cuadrado cm^2	0,000001 m^2 milímetro cuadrado mm^2

Para convertir de una unidad de superficie a otra usaremos el siguiente esquema.



Ejemplos:
1. Convierte 1,3 m^2 a:
   (a) hectómetro cuadrado
   (b) milímetro cuadrado

   Resolución:
   a) **Hectómetro cuadrado**: convertimos a una unidad mayor, entonces dividimos:
   $1,3\ m^2 = 1,3 \div 100^2\ hm^2 = 0,00013\ hm^2$

   b) **Milímetro cuadrado**: convertimos a una unidad menor, entonces multiplicamos:
   $1,3\ m^2 = 1,3 \times 100^3\ mm^2 = 1\ 300\ 000\ mm^2$

2. Convierte 2,5 m^2 a:
   (a) kilómetro cuadrado
   (d) decímetro cuadrado

   Resolución:
   a) $2,5m^2 = 2,5 \div 100^3\ km^2 = 0,0000025\ km^2$
   b) $2,5m^2 = 2,5 \times 100\ dm^2 = 250dm^2$

3. Convierte 12,8 m^2 a:
   (a) decámetro cuadrado
   (d) centímetro cuadrado

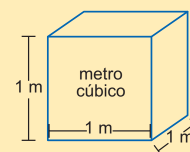
   Resolución:
   a) $12,8m^2 = 12,8 \div 100\ dam^2 = 0,128\ dam^2$
   b) $12,8m^2 = 12,8 \times 100^2\ cm^2 = 128000\ cm^2$

Importante

Los instrumentos de masa más utilizados son:



Un metro cúbico es el volumen de un cubo que tiene un metro de arista.



Nota

Estas son algunas equivalencias, más usadas:
$1\ hm^3 = 1000\ dam^3$
$1\ m^3 = 1000\ dm^3$
$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$

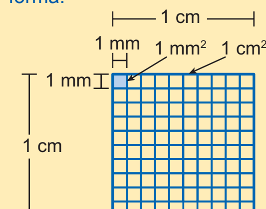
Nota

Para medir otras extensiones, como agrarias o terrestres, se emplean las siguientes unidades:
Hectárea (ha):
$1\ hm^2 = 10\ 000\ m^2$
Área (a):
$1\ dam^2 = 100\ m^2$
Centiárea (ca):
$1\ m^2 = 1\ m^2$



Atención

Gráficamente, se representa a la superficie de la siguiente forma:



Problemas resueltos

1 ¿A cuántos decímetros (dm) equivalen 0,0035 km?

Resolución:

Tenemos en cuenta las equivalencias:

1 km = 1000 m = 1000 (10 dm)

$\therefore$ 1 km = 10^4 dm

Hallamos los dm:

1 km ______ 10^4 dm

0,0035 km ______ x

$$\Rightarrow x = \frac{0{,}0035\ \text{km}(10^4\ \text{dm})}{1\text{km}}$$

x = 35 dm

2 ¿A cuántos decalitros (dal) equivalen 267×10^2 mililitros (ml)?

Resolución:

Tenemos en cuenta las equivalencias:

1 dal = 10 l = 10 (1 l) = 10 (1000 ml)

$\therefore$ 1 dal = 10^4 ml

Hallamos el número de dal:

1 dal ______ 10^4 ml

x ______ 267×10^2 ml

$$\Rightarrow x = \frac{(1\ \text{dal}) \cdot 267 \times 10^2\ \text{ml}}{10^4\ \text{ml}}$$

x = 2,67 dal

3 Una granja cosecha al año 800 miriagramos de cebada, cada 2 años cosecha 16 quintales de trigo y 0,35 toneladas de maíz. ¿Cuántas toneladas (t) producirá dentro de 8 años?

Resolución:

Hallamos la producción de cebada:

1 año ______ 800 mag = $800(10^{-2}$ t) = 8 t

8 años ______ 8 t $\times$ 8 = 64 t

Hallamos la producción de trigo:

2 años ______ 16 q = $16(10^{-1}$ t) = 1,6 t

8 años ______ 1,6 t $\times$ 4 = 6,4 t

Hallamos la producción de maíz:

2 años ______ 0,35 t

8 años ______ 1,4 t

La producción total dentro de 8 años será:

64 t + 6,4 t + 1,4 t = 71,8 t

4 Una cocina a gas utiliza 30 cm^3 de gas por día. Si un balón de gas contiene 15 dm^3 ¿cuántos días de consumo podrá abastecer 3 balones de gas?

Resolución:

Hallamos el volumen total a consumir:

$3(15\ dm^3) = 45\ dm^3$

El n.º de días es:

$$x = \frac{45\ dm^3}{30\ cm^3} = \frac{45(10^3\ cm^3)}{30\ cm^3}$$

$\therefore$ x = 1500 días

5 Una chacra posee 75 dam^2 de área. Se desea dividirlos en 25 partes iguales. Halla el área (en m) de cada una de las partes.

Resolución:

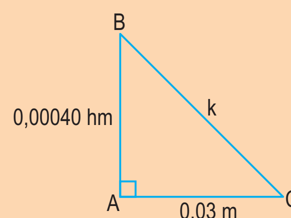
Área = 75 dam^2 = $75 \times 10^2\ m^2$

Dividimos en 25 partes iguales:

$$x = \frac{75 \times 10^2 m^2}{25} = 3 \times 10^2\ m^2$$

$\therefore$ x = 300 m^2

6 Halla el valor de k (en mm); si ABC es un triángulo rectángulo.



Resolución:

$AB^2 + AC^2 = k^2$

$(0{,}00040\ hm)^2 + (0{,}03\ m)^2 = k^2$

$(40\ mm)^2 + (30\ mm)^2 = k^2$

$2500\ mm^2 = k^2$

$\therefore$ k = 50 mm

7 Un nevado posee una altura de 450 decámetros. Un montañista sube cada día 180 metros. ¿Cuántos días demorará en llegar a la cima del nevado?

Resolución:

Dividimos para hallar el número de días:

$$x = \frac{450\ dam}{180\ m} = \frac{450(10\ m)}{180\ m} = 25$$

$\therefore$ x = 25 días


Intelectum
EVOLUCIÓN

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344